PROBLEM ÇÖZME STRATEJİLERİ

Albert Erkip
Sabancı Üniversitesi, İSTANBUL

Problem çözerken bilgilerimizi, deneyimlerimizi ve en başta (çoğu zaman istemeyerek de olsa) aklımızı kullanır, bilgi ve deneyimlerimizin öğrettiği bir takım yöntemler uygularız. Matematik problemleri bu bakımdan diğer problemlerden farklı değil; bilgi olarak matematiksel "doğru" lar, yani teoremler var. Tümevarım gibi matematik yöntemleri ile matematiksel yapılar ve gösterimler bize açık ve kesin bir ifade ortamı sağlıyorlar. Bunun da ötesinde problem çözmenin, pek öğretilemeyen, zaman içinde insanın kendi kendine keşfettiği bir takım stratejileri var. Bu yazıda bu stratejilerden bazılarını özellikle kolay örneklerlerle sıralamaya çalıştım. Bu sıralama çok da kesin (yani "matematiksel") değil ama sanırım bir fikir veriyor. Yazıdaki örnekler çeşitli kaynaklardan toplanmış, folklorik denebilecek problemler. Bir ekleme: Örneklerdeki çözümlere hangi yollardan erişildiği, problemi ilk çözenin ne düşünüp de bu yola başvurduğu gibi sorulara burada yanıt aramayın. O ayrı bir konu.

İndirgeme

Problem adım adım irdelenerek çözüme ulaşılır. Kolay bir örnek $3x + 5 = 8$ denkleminin çözümünde görülür, adım adım giderek önce $3x = 8 - 5 = 3$ ve sonra da $x = 3/3 = 1$ bulunur. Ders kitaplarında çoğu bu tür problemlere yer verilirse de aynı düşünce şekli daha karmaşık ve keyifli problemlerde de çok işe yarar.

2 vezir, 3 kavuk

Padişah 2 vezirini çağırıp, onlara biri ak ikisi kara 3 kavuk gösterip kara kavukları vezirlerin başına yerleştirir. İki vezir de kendi başındaki kavuğun rengini bilmez, ancak karşısındakinin başındaki kavuğu görür. Başındaki kavuğun rengini ilk bilen başvezir olacaktır. Ne olur?

Çözüm: Vezirlerin daha akıllı olanı şöyle düşünür: "Eğer benim başımda ak kavuk olsaydı, karşımdaki aptal değil ya, başka ak kavuk kalmadığını anlayıp başındakinin kara olduğunu hemen söylerdi. Hiç bir şey söylemediğine göre benim kavuğum ak olamaz."

Dikkat ederseniz, akıllı vezir çaktırmadan olmayana ergi yapıyor. "*Şöyle* olsaydı *öyle* olurdu; *öyle* olunca da *böyle* olacaktı. Ama *böyle* olmadığını görüyorum (ya da, *böyle* olamayacağını biliyorum-bunun adına da çelişki deniyor-). O halde *şöyle* değildir." Bu şekildeki irdeleme zincirlerini günlük hayatta bile kurarız ama "olmayana ergi" adını kullanınca nedense çoğumuz paniğe kapılır.

İrdeleme zincirlerini aşağıdaki problemdeki gibi iyice uzatmak mümkün:

40 çiftin öyküsü

Bir köyde 40 karı-koca yaşar. Köyün geleneklerine göre, bir erkek eşini aldatınca kendi eşinin dışındaki tüm kadınlar olayı hemen öğrenirler. Öte yandan, eşinin kendisini aldattığının farkına varan kadın, onu ertesi sabah güneş doğarken öldürmek zorundadır. Bir gün köyün papazı, vaazında "Bu köyde karısını aldatan bir koca olduğunu öğrendim" der. Aslında köyün tüm erkekleri eşlerini aldatmaktadır. Ne olur?

Çözüm: Problemi önce basitleştirelim; köyde sadece tek bir erkek eşini eşini aldatıyor olsun. Aldatanın eşi papazın vaazını duyunca "Başkası olsaydı bilmem gerekirdi." diye düşünerek aldatılanın kendi olduğunu hemen anlayacaktır. Şimdi bir adım ilerleyip sadece iki erkeğin aldattığı probleme bakalım. Aldatılan eşlere A ve B diyelim. İlk gün A, B 'nin, B ise A 'nın kocasını öldüreceğini düşünür. Ancak ertesi sabah hiç bir ölüm olmadığını görünce, iki kadın da aldatan koca sayısının birden fazla olduğunu, bu durumda da bilmedikleri erkeğin kendi kocaları olması gerektiğini anlarlar. İrdelemeye devam edelim; sadece üç aldatan kocanın olduğu problemde ilk iki gün herkes bekler, ancak üçüncü günün sabahı beklentileri gerçekleşmeyen eşler kendi kocalarının da aldattığının farkına varırlar. Böyle devam edince 40 erkekli problemin çözümü de bulunur: İlk 40 gün hiç bir şey olmaz, ancak 41-inci sabah güneş doğarken kıyamet kopar, tüm kadınlar kocalarını öldürürler.

Bu son problemde irdeleme zinciri bayağı uzun, köydeki erkek kıyımının 40-ıncı günde mi 41-inci günde mi olduğunu karar vermek için dikkatli bir sayma (ve doğru genelleme) gerekir. İşte burada "matematik" bize yardımcı olur. Tümevarım bu tür uzun irdelemeler için biçilmiş kaftandır.

Tam n erkeğin eşini aldattığı $\mathbf{E}(n)$ problemini düşünelim ve *" $\mathbf{E}(n)$ de ilk n gün hiç bir şey olmaz, $(n+1)$. sabah güneş doğmadan tüm aldatılan kadınlar kocalarını öldürür"* önermesine $\mathbf{P}(n)$ diyelim. Yukarıda $\mathbf{P}(1)$ 'in doğru olduğunu gösterdik (tümevarımın başlama adımı). Şimdi $\mathbf{P}(n)$ önermesinin doğru olduğunu varsayalım (tümevarım varsayımı) ve $(n+1)$ aldatan erkek problemine bakalım. Her bir aldatılan kadın (kendi durumlarını bilmediği için) problemi "$\mathbf{E}(n)$" sanıp (tümevarım varsayımından dolayı) bildiği aldatılan kadınların kocalarını $(n+1)$-inci sabah öldürmelerini bekler. Ancak o sabah bir şey olmadığını görünce kendi durumunun farkına varır (problem $\mathbf{E}(n)$ değilse eşini aldatan en az $(n+1)$ erkek vardır, bilmediği erkek de ancak kendi kocası olabilir) ve ertesi ($(n+2)$-nci) sabah kocasını öldürür. Bu son dediğimiz $\mathbf{P}(n+1)$ önermesinin kanıtı, yani tümevarım tamamlandı.

Bu son kanıtta matematiğin bir başka cilvesini de gördük. Bazı problemleri genellenmiş hali, problemin kendisinden daha kolay olabilir; en azından, genelleme, çözüm için iyi bir yola yönelmemizi sağlar.

Dönüştürme, Şekil Değiştirme

Şekil değiştirme matematikçilerin sık başvurdukları bir oyundur; problemi evirip çevirsiniz, sorulan şeyi değil sorulmayanı, daha doğrusu bulacağınızı kestirdiğiniz şeyi ararsınız. Sonunda bambaşka bir problem çıkar, onu çözersiniz. (Siz ne sorarsanız sorun, matematikçi kendi bildiğini okuyacaktır!) Ama bu son çözdüğünüz ilk sorulanı yanıtlar.

Önce indirgeme ile çözebileceğimiz kolay bir örneğe bakalım:

Tenis turnuvası (yenilen eleniyor)

> *100 tenisçinin katıldığı bir turnuvada yenilen elenir. Her turda elenmeyip kalanlar kurayla eşleşir, eşlemede tek kalan olursa bir sonraki tura geçer. Son kalan şampiyon olur. Turnuvada kaç maç yapılmıştır?*

Çözüm: Her turda yapılan maç sayısını, elenenleri ve kalanları bir tabloda gösterelim:

Tur	Maç sayısı	Elenen	Kalan
1	50	50	50
2	25	25	25
3	12	12	13
4	6	6	7
5	3	3	4
6	2	2	2
7	1	1	Şampiyon

7 turda toplam 99 maç yapılmıştır.

Tenis turnuvası (iki kez yenilen eleniyor)

> *100 tenisçinin katıldığı bir turnuvada iki kez yenilen elenir. Her turda elenmeyip kalanlar kurayla eşleşir, eşlemede tek kalan olursa bir sonraki tura geçer. Son kalan şampiyon olur. Turnuvada kaç maç yapılmıştır?*

Çözüm: Yukarıdaki gibi bir tablo yapmaya çalışırsak ikinci turdan sonra işler karışır (ilk turda yenilen bir tenisçi ikinci turda yenilmeyebilir), kimin ne zaman eleneceğinin hesabını tutmak oldukça zordur. Kaç maç yapıldığına değil kaç yenilgi alındığına (aslında aynı şey) bakarsak iş kolaylaşır. Turnuva sonunda 99 tenisçi elenecektir; her biri tam iki kez yenileceğinden bu 198 yenilgi eder. Ya şampiyon hiç yenilmeden turnuvayı kazanır, toplam 198 yenilgi vardır, ya da şampiyon tam bir maç kaybetmiştir, toplam 199 yenilgi alınmıştır. Sonuç olarak turnuva 198 veya 199 maç sürer.

Bu ikinci yöntem "yenilen eleniyor" türü turnuva sorusunu da turları sıralamaya gerek bırakmadan çözer. İşi karıştırmak için tablo yapıp turları saymanın pek kolay işlemediği tersine problemler de üretebiliriz:

> *"Yenilen elenir" türü bir turnuvada tam 75 maç yapılmıştır. Turnuvaya kaç tenisçi katıldı?*

Vagonlara dağılma

> *3 vagonlu bir trene 20 yolcu biner. Yolcular 3 vagona kaç değişik şekilde dağılabilir?*

Problem bu haliyle (pek çok matematik sorusunun ilk ortaya atıldıkları zaman olduğu gibi) pek açık değil, iki farklı yorum (yani iki farklı problem) akla geliyor:

1. *Yolcuların kimliği vardır, yani kimin hangi vagonda oturduğu önemlidir.*

Çözüm: Soruya bir "dağılma" problemi yerine "seçme" problemi olarak bakalım. Her yolcu 3 vagondan birini seçecektir. 20 yolcunun yapabileceği toplam seçme sayısı kaçtır? Yanıt $3 \times 3 \times \cdots \times 3 = 3^{20} = 3486\,784\,401$ olarak bulunur. (3^{20} sayısını elde etmenin başka bir yolu $(a_1, a_2, ..., a_{20})$ şeklindeki "seçim 20-li" 'lerine bakmaktır. Burada a_j, j-inci yolcunun seçtiği vagon numarası, yani 1, 2 veya 3 sayılarından biri olacaktır. Bu tür tam 3^{20} tane 20-li vardır.)

2. *Yolcuların kimliği yoktur, yani sadece 1., 2. ve 3. vagondaki yolcu sayıları önemlidir.*

Çözüm: Olayı değiştirelim; önce vagonları ayıran duvarları kaldırıp (tren uzun bir tek salon haline gelecektir), 20 yolcuyu tren boyunca tek sıra oturtalım. Yolcuların kimliği önemli olmadığından kimin hangi sırada oturduğu farketmez. Şimdi vagonları ayıran 2 duvarı (birinci-ikinci vagon arasındaki ile ikinci-üçüncü arasındaki duvar) tek tek bu yolcuların en önüne, arasına veya en arkasına yerleştirelim. Yolcular 3 vagona dağılmış oldular! Demek ki aradığımız dağılım sayısı, "2 duvarı kaç değişik şekilde yerleştirebiliriz?" sorusunun yanıtı ile aynıdır. Bir adım daha gidelim: Yolcuların yerine beyaz tavla pulları, duvarların yerine de da siyah tavla pulları koyalım. Elimizde tek sıra duran 22 pul oldu; bunların ikisi siyah, yirmisi beyaz. Kaç farklı dağılım vardır? Ya da, 22 puldan ikisini (siyah olanları) belirlemek istiyoruz, kaç farklı seçim yapabiliriz? Yanıtın $\binom{22}{2} = 231$, yani 22 'nin 2 'li kombinasyonlarının sayısı olduğu kolayca görülüyor.

Vagonlara dağılma problemi hakkında son bir nokta; problemin iki yorumu daha mümkün, bunların da çözümünü okurlara bırakalım:

3. *Yolcuların kimliği vardır ancak vagonlar numaralı değildir; yani kimin kiminle oturduğu önemlidir ama hangi vagonda oturdukları önemli değildir.*
4. *Yolcuların kimliği yoktur ve vagonlar numaralı değildir, yani sadece 20 birbirinin aynı elemanın 3 kümeye kaç farklı şekilde ayrılabileceğini arıyoruz.*

Simetri

Problemde simetri ararsınız, bulursanız da simetriden çözümü oluşturursunuz. Şansınız varsa yöntem işler. Tabii ki matematikçiler simetri deyince yalnızca geometrik anlamını düşünmüyorlar, simetri aslında bir tür eşleme. Nesneleri ikişer ikişer gruplayıp bunlara "simetrik" diyorsunuz.

Para oyunu

> *İki kişi ellerinde 50 bin liralık madeni paraları bir dosya kağıdının üzerine sırayla, birer birer ve öncekilere değmeden yerleştirmeye çalışırlar. Parasını yerleştirecek yer bulamayan oyunu kaybeder. Ne olur?*

Çözüm: Oyunu ilk oynayan kazanır. Kazanmak için parasını köşegenlerin kesim noktasına (daha doğrusu, paranın merkezi kağıdın merkezine denk gelecek şekilde) yerleştirir. Sonraki her hamlede ilk oyuncu parasını, ikincinin son yerleştirdiği paranın merkeze göre tam simetriği olacak şekilde koyar. Oyunun herhangi bir anında ikinci oyuncu parasını koyacak yer bulabiliyorsa, bir sonraki hamlede birinci oyuncu da o yerin simetriğini boş bulacaktır.

Çarpan sayısı tek mi, çift mi?

Pozitif bir k tamsayısının çarpan sayısı tek midir, çift midir?

Çözüm: Çarpan ile, k 'yı tam olarak bölen pozitif tamsayıları kastediyoruz, örneğin 6 'nın çarpanları $1, 2, 3$ ve 6 'dır. 6 'nın 4 tane (yani çift sayıda) çarpanı vardır.

a, k 'nın bir çarpanı ise, $\hat{a} = \frac{k}{a}$ da bir çarpandır. Burada a ile $\hat{a}$ arasında bir eşleme (simetri) sözkonusudur; her a için verdiğimiz bağıntıyla belirlenen tek bir $\hat{a}$ vardır. Çarpanları ikişer ikişer grupladık, o halde toplam çarpan sayısı çift mi ? Burada biraz dikkat etmek gerekebilir; gerçekten çarpanları ikişerli gruplara ayırdık mı? a ile $\hat{a}$ nın farklı iki sayı olduğundan emin miyiz? Bu iki sayının aynı olması, ancak $a = \hat{a} = \sqrt{k}$ durumunda, yani (a tamsayı olacağından) k bir tam kare ise mümkündür. Sonunda problemi çözdük: Eğer k bir tam kare ise, çarpan sayısı tektir; k bir tam kare değilse, çarpan sayısı çifttir.

"Çarpan" ile pozitif veya negatif tüm tamsayıları kastediyor olsaydık (yine simetriden) problem daha da basitleşecekti. Bu kez şu simetriyi kullanacaktık: Eğer a bir çarpan ise, $\hat{a} = -a$ sayısı da bir çarpandır.

Sayma

Olabilecek durumların sayısını bilmek problemin çözümünde önemli bir adım olabilir. Dikkat ederseniz aşağıdaki örneklerde bir şey saymamız istenmiyor ama biz saydıklarımızdan bir anlam çıkarıyoruz. Bu tür sayma bir bakıma "çekmece ilkesi" 'ni hatırlatıyor.

Boyalı kağıt oyunu

Kırmızı mürekkep dökülmüş bir kağıda bakan Ali ve Ayşe bir oyun icat ederler. Ali kağıdın kısa kenarından küçük bir uzunluk belirleyecek, Ayşe de kağıdın üzerinde aralarındaki uzaklık belirlenen uzunluğa eşit olan aynı renkte iki nokta arayacaktır. Böyle iki nokta bulursa oyunu Ayşe, bulamazsa da Ali kazanacaktır. Oyunu kim kazanır?

Çözüm: Ayşe kağıda kenarları Ali 'nin belirlediği uzunlukta bir eşkenar üçgen çizer ve oyunu kazanır. Nedenine gelince; kağıt 2 renkli, üçgenin ise (aralarındaki uzaklık belirlenene eşit olan) 3 köşesi var. O halde bu 3 köşeden en az ikisi aynı renk olmalı.

52 sayı

Bana 1 *ile* 100 *arasında* 52 *tamsayı söyleyin. Bu sayılardan ikisi aynı ya da ikisinin farkı* 3 *ise ben kazanıyorum; yoksa siz kazanıyorsunuz. Bu iyi bir oyun mu?*

Çözüm: Bu oyunu oynamanızı önermem, hep ben kazanırım. Niye kazandığımı açıklayayım (kanıtlayayım!). Önce 1 'den 103 'e kadar tüm tamsayıları altalta yazarak bir liste hazırlıyorum. (103 nereden çıktı derseniz, birazdan göreceğiz.) Söylediğiniz her x sayısı için listemde x ve $x + 3$ tamsayılarının karşılarına birer çarpı atıyorum. (x de $x + 3$ de 1 ile 103 arasında.) Şimdi çarpıları sayalım; 52 sayı söylemiştiniz, her biri için (x ve $x + 3$ 'e) iki çarpı koydum. Toplam 104 çarpı eder. Halbuki listemde 103 yer vardı, yanında en azından iki çarpı olan bir tamsayı olmalı... Bu da söyledikleriniz arasında birbirine eşit ya da aralarındaki fark 3 olan bir çift var demek.

Elmalar

Bu bilmecenin benzerini duymuşsunuzdur. Bir sepet dolusu elma var. Bunları ikişer ikişer dağıtınca 1, *üçer üçer dağıtınca* 1, *beşer beşer dağıtınca* 2, *yedişer yedişer dağıtınca*

2, onbirer onbirer dağıtınca da 6 elma artıyor. Alışılmış soru, "Sepette kaç elma var?". Biz başka bir soru soracağız: Verdiğimiz problem gerçekçi mi, yani çözümü var mı?

Çözüm: Sorunun bu yeni hali biraz şaşırtıcı gelebilir, sepetteki elma sayısını bulabiliyorsak tabii ki problem gerçekçidir. (Verdiğim problem gerçekçi, sepette 457 veya 2767 veya 5077, $\cdots$ elma var. 457 çözümünü deneye yanıla buldum; buna $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ 'un katlarını ekleyince diğer çözümler de çıktı.) Ama kendinizi bir problem kurucunun yerine koyun. Bu tür bir problem uyduracaksınız, çözümü olsun istersiniz. Ya da bu tür bir problemi çözmek istiyorsunuz, problem gerçekçi değilse boş yere neden uğraşasınız. (Gerçekçi olma konusunda bir örnek; ikişer ikişer dağıtınca 1, dörder dörder dağıtınca 2 artan bir sepet bulamazsınız. Elma sayısı hem tek hem de çift olur.)

Önce problemden bir an için biraz uzaklaşacağız. Bir x tamsayısının k ile bölünmesinde artanı x_k ile gösterelim ve $K(x) = (x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11})$ beşlisini tanımlayalım. Yani, $K(x)$ beşlisi x 'in sırasıyla $2, 3, 5, 7$ ve 11 ile bölündüğünde kalanları gösteriyor. Elma sorusu bu gösterimle $K(x) = (1, 1, 2, 2, 6)$ olan bir x tamsayısı aramak demek.

Şimdi iki şeye bakacağız. Birincisi: *Bu türden kaç tane farklı beşli vardır?* x_k, k ile bölününce kalan olduğundan $0, 1, ..., k-1$ değerlerinden birini alabilir. Demek ki x_2 için olası $2, x_3$ için olası $3, x_5$ için olası $5, x_7$ için olası 7 ve x_{11} için de olası 11 değer olduğundan beşliler için olabilecek $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ farklı değer vardır. Yukarıdaki "52 sayı" probleminde olduğu gibi, bu beşlileri altalta sıralayıp bir liste yapalım ve $x = 1, 2, ..., 2309, 2310$ sayıları için $K(x)$ beşlilerini bu listede işaretleyelim. Listedeki beşli sayısı ile işaret sayısı aynı olduğundan iki durumdan biri gerçekleşmelidir. Ya listedeki tüm beşliler işaretlenmiştir; bu ise özel olarak $(1, 1, 2, 2, 6)$ beşlisinin işaretlendiğini, yani aradığımız x sayısının var olduğunu söyler. Ya da listedeki bazı beşliler işaretlenmemiştir. Bu durumda listedeki bir beşli en az iki kere işaretlemiş olacaktı. Matematik dilinde bu, $1 \leq y < z \leq 2310$ şeklinde iki y ve z tamsayısının $2, 3, 5, 7$ ve 11 ile bölündüklerinde aynı artanı vermeleri , yani $z - y$ tamsayısının $2, 3, 5, 7$ ve 11 ile ve dolayısıyla 2310 ile tam bölünmesi demektir. Bu son söylediğimiz ise $1 \leq z - y \leq 2309$ eşitsizliğinden dolayı gerçekleşemez. Toparlarsak, $y \neq z$ için $K(y) \neq K(z)$ olduğunu, dolayısıyla da listedeki tüm beşlilerin işaretlenmiş olacaklarını gösterdik.

Elma problemi aslında sayılar teorisinde "Çin Kalan Teoremi" adlı önemli bir teoremin özel halidir; bu teorem $a_1, a_2, ..., a_n$ tamsayıları ile aralarında asal $p_1, p_2, ..., p_n$ sayıları verildiğinde, her $i = 1, 2..., n$ için $x \equiv a_i \mod p_i$ koşulunu sağlayan bir x tamsayısının bulunabileceğini söyler. Yukarıda bu teoremin kanıtını elma sorusuna uyarladık.

YAZARLARA...

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

Konu sunuşları; Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar; Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı; Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler; Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar; Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler; Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-Antalya

adresine gönderilecektir.
