ROLLE TEOREMİNİN BİR GENELLEŞMESİ ÜZERİNE

Uygar Sümbül
Bilkent Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, ANKARA

Analizde, aşağıda ifade ettiğimiz ve klasik Rolle Teoremine denk olan teorem çok meşhurdur:

Teorem : $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ fonksiyonu sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = 0 = f(b)$ ise, $f'(x_0) = 0$ olacak biçimde en az bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Geometrik olarak, Rolle Teoremi, yukardaki koşulları sağlayan fonksiyonun grafiğinin (a,b) açık aralığındaki en az bir noktada apsis eksenine paralel teğete sahip olacağını söyler.

Şimdi, Rolle teoreminin aşağıdaki bir genelleşmesini verip ispatlayalım:

Teorem 1. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve açık (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Ayrıca, $f(a) = 0 = f(b)$ eşitliği sağlansın. Bu takdirde, herhangi bir $P(x)$ sürekli fonksiyonu verildiğinde,

$$f'(x_0) = f(x_0) \cdot P(x_0) \tag{1}$$

sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Sonuçlar:

(1) $P(x) \equiv 0$ alırsak, Rolle Teoremine denk olan yukarıdaki teorem elde edilir.

(2) $P(x) \equiv 1$ alırsak, $f'(x_0) = f(x_0)$ sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

(3) $P(x) = f(x)^{1998}$ alırsak, $f'(x_0) = f(x_0)^{1999}$ sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Teorem 1'in İspatı: $P(x) = Q'(x)$ eşitliğini sağlayan bir $Q(x)$ fonksiyonu alalım. ($Q(x)$'e, bilindiği gibi, $P(x)$'in ilkel fonksiyonu veya belirsiz integrali denilir.) Şimdi şöyle bir $F(x)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$F(x) = f(x)e^{-Q(x)} \tag{2}$$

$f(a) = 0 = f(b)$ olduğuna göre $F(a) = 0 = F(b)$ 'dir. O halde klasik Rolle Teoremine göre,

$$F'(x_0) = 0 \tag{3}$$

sağlanacak biçimde en az bir $x_0 \in (a,b)$ bulunacaktır. F fonksiyonunun (2) 'deki ifadesini (3) 'de gözönüne alırsak,

$F'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) \cdot e^{-Q(x_0)} - f(x_0) \cdot Q'(x_0) \cdot e^{-Q(x_0)} = 0$ olur. $e^{-Q(x_0)} \neq 0$ olduğuna göre yukarıdaki eşitliğin her iki yanını $e^{-Q(x_0)}$ ile bölebiliriz. O halde, $Q'(x_0) = P(x_0)$ olduğuna göre,

$$f'(x_0) - f(x_0) \cdot Q'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) = f(x_0) \cdot P(x_0)$$

eşitliğini elde ederiz.

Aşağıdaki teorem, Teorem 1 'in koşullarını zayıflatmakla elde edilir:

Teorem 2. $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) 'de türevlenen ve bir C sabiti için $f(a) = C = f(b)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde herhangi bir $P(x)$ sürekli fonksiyonu için,

$$f'(x_0) = (f(x_0) - C) \cdot P(x_0)$$

sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.

İspat: $\varphi(x) = f(x) - C$ diyelim. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ olur. O halde Teorem 1 'e göre

$$\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) \cdot P(x_0)$$

sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ vardır. Bu sonuncu eşitlikten ise ($\varphi(x)$ yerine $f(x) - C$ koymakla)

$$f'(x_0) = (f(x_0) - C) \cdot P(x_0)$$

elde edilir.

Teorem 1 'in bir sonucunu daha söyleyelim:

Sonuç: $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sürekli ve (a, b) açık aralığında türevlenebilir iki fonksiyon olsunlar. Ayrıca, her $x \in (a, b)$ için $f(x) \neq g(x)$ olsun. Bu takdirde, eğer $f(a) = g(a)$ ve $f(b) = g(b)$ ise, herhangi sürekli $P(x)$ verildiğinde

$$\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{f(x_0) - g(x_0)} = P(x_0)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ vardır.

İspat: $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ diyelim. f ve g üzerine konulmuş koşullardan $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$ olur. O halde Teorem 1 'e göre $\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) \cdot P(x_0)$ sağlanacak biçimde bir $x_0 \in (a, b)$ vardır. Buradan da,

$$f'(x_0) - g'(x_0) = (f(x_0) - g(x_0)) \cdot P(x_0) \quad \text{ve} \quad \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{f(x_0) - g(x_0)} = P(x_0)$$

elde edilir.

Teşekkürler: Bu çalışmanın ortaya çıkmasında, değerli yardımlarından dolayı, Doç. Dr. İlham Aliyev 'e şükranlarımı sunuyorum.
