PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

-Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

-Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

-Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 30 Kasım 1999 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A. 191. Düzlem üzerinde 1111 tane nokta, rasgele alınmış herhangi 3 nokta yarıçapı 1 'e eşit olan bir dairenin üzerinde bulunacak biçimde işaretlenmiştir. Bu durumda, noktaların hepsinin yarıçapı 1 olan dairenin üzerinde olduğunu ispat ediniz.

A. 192. $x + xy + y = x^2 + y^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerini bulunuz.

A.193. $x^2 - y^2 = 0$, $(x-a)^2 + y^2 = 1$ denklem sisteminin

(a) 4 tane, (b) 3 tane, (c) 2 tane

çözüme sahip olması için a parametresinin sağlaması gereken koşulları bulunuz.

A.194.

$$\underbrace{((\ldots(((}_{100\ tane\ parantez} x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2-2)^2$$

ifadesinde parantezler açılarak sadeleştirmeler yapıldıktan sonra x^2 'nin önündeki katsayı ne olacaktır?

A. 195. İkişer ikişer birbirine dıştan teğet olan A, B, C merkezli ve R_1, R_2, R_3 yarıçaplı üç çember aynı zamanda bir d doğrusuna da teğettir. A merkezli çemberin d doğrusuna değdiği noktanın A 'ya göre simetriği P, diğer iki çemberin birbirine değdiği nokta Q ile gösterilmek üzere, $PQ \perp CB$ olduğunu ispat ediniz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.191. Pozitif sayılardan oluşan (a, b, c, d) sıralı dörtlüsünden her sayı bir sonraki ile ve dördüncü sayı ise birinci sayı ile çarpılarak elde edilen sayıların sıralanmasıyla (ab, bc, cd, da) sıralı dörtlüsü elde ediliyor; sonra aynı işlem bu yeni dörtlüye uygulanıyor ve üçüncü sıralı dörtlü oluşturuluyor, ve bu işlem sürdürülüyor. Böylece elde edilen dörtlüler dizisinde (a, b, c, d) dörtlüsüne ikinci kez rasgelebilmek için gerek ve yeter koşul, $a = b = c = d = 1$ olmasıdır. Kanıtlayınız.

Y.192. $(n > 5)$ olmak üzere, bir düzgün n-gende en büyük ve en küçük köşegenlerin uzunlukları arasındaki fark n-genin kenar uzunluğuna eşit ise, n sayısını bulunuz.

Y. 193. Bir subay, her gece, 33 asker içinden seçtiği bir takımı nöbete göndermektedir. Takımdaki asker sayısı bazı geceler 9, bazı geceler ise 10 olmaktadır. Bütün askerlerin aynı sayıda nöbet tutmuş olmaları için kaç gece geçmelidir?

Y. 194. n bir doğal sayı olmak üzere, $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ denkleminin tamsayılarda bir çözümü varsa, o çözümden başka iki tane daha çözümü bulunduğunu gösteriniz.

Y. 195. Merkezleri A ve B ile gösterilen, birbirlerinin dışında bulunan K_1 ve K_2 küreleri veriliyor. Tepe noktası K_2 küresi üzerinde bulunan ve K_1 küresine teğet olan koninin bu küreye değdiği noktaların oluşturduğu çemberin merkezi gözönüne alınıyor. Tepe noktası K_2 üzerinde değiştiği zaman, sözü edilen merkezin geometrik yerini belirleyiniz.

ÇÖZÜMLER

A. 181. $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm. $x^3 = 2y^3 + 4z^3$ olduğundan, x^3 bir çift sayıdır ve bir tam küp olduğu için 8 ile bölünmek zorundadır. Eşitliğin her iki yanını 2 ile böldükten sonra y^3 'ün de bir çift sayı olduğunu ve dolayısıyla, 8 ile bölündüğünü söyleyebiliriz. Yine her iki yanı 2 ile böldükten sonra bu kez z^3 'ün bir çift sayı olduğunu ve dolayısıyla, 8 ile bölündüğünü görüyoruz. Böylece, verilen denklemi sağlayan x, y ve z tamsayılarının üçü de 2 ile bölünmek zorundadır. $\tilde{x} = x/2$, $\tilde{y} = y/2$ ve $\tilde{z} = z/2$ dersek, $(\tilde{x})^3 - 2(\tilde{y})^3 - 4(\tilde{z})^3 = 0$ denklemini elde ederiz. Bunun tam çözümleri olan $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ ve $\tilde{z}$ yine de çift sayılar olmalıdır ve ...

Böylece, verilen denklemin tamsayı çözümleri, her n için 2^n 'ye bölünmelidir. Buradan, denklemin yegane tamsayı çözümünün $x = y = z = 0$ olduğu sonucu çıkar.

A.182. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$$

Çözüm. Birinci eşitliğin her iki yanının küpünü alarak, üçüncü eşitliği, taraf tarafa çıkarırsak, $(x+y)(x+z)(y+z) = 0$ olur. $x + y = 0$ ise, $z = a$ olur ve bunu ikinci denklemde gözönüne alırsak, $x = y = 0$ olur. Böylece bu durumda $(0, 0, a)$ bir çözümdür. Benzer şekilde, diğer iki çözüm bulunur: $(0, a, 0), (a, 0, 0)$. Sistemin, bunlardan başka çözümü yoktur.

A.183. a, b ve c doğal sayılarının ortak katlarının en küçüğü ($OKEK$) ve ortak bölenlerinin en büyüğü ($OBEB$) sırasıyla,$[a, b, c]$ ve (a, b, c) olsun. x ve y sayılarının $OBEB$ 'i de (x, y) ile gösterilmek üzere

$$\frac{[a,b,c]}{(a,b,c)}(a,b)(a,c)(b,c) = abc$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. p_i 'ler asal sayılar ve α_i, β_i, δ_i sayıları da negatif olmayan tamsayılar olmak üzere a, b ve c 'yi asal çarpanlarına ayıralım:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}; \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_n^{\beta_n} \;;$$
$$c = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} ... p_n^{\delta_n}.$$

($\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ sayılarının 0 (sıfır) değerini alabileceklerini de unutmayınız.) Kolayca anlaşılacağı üzere,

$$[a,b,c] = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1,\delta_1\}} . p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2,\delta_2\}} ... p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n,\delta_n\}};$$
$$(a,b,c) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1,\delta_1\}} . p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2,\delta_2\}} ... p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n,\delta_n\}};$$
$$(a,b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} . p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} ... p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}};$$
$$(b,c) = p_1^{\min\{\beta_1,\delta_1\}} . p_2^{\min\{\beta_2,\delta_2\}} ... p_n^{\min\{\beta_n,\delta_n\}};$$
$$(a,c) = p_1^{\min\{\alpha_1,\delta_1\}} . p_2^{\min\{\alpha_2,\delta_2\}} ... p_n^{\min\{\alpha_n,\delta_n\}}$$

eşitlikleri doğrudur. Şimdi,

$$[a,b,c].(a,b).(b,c).(a,c) = (a,b,c).abc$$

bağıntısını kanıtlamak için, her $i = 1, ..., n$ için bu eşitliğin her iki yanındaki p_i 'lerin üstlerinin eşitliğini kanıtlamak yeter. Yani,

$$\max\{\alpha_i,\beta_i,\delta_i\} + \min\{\alpha_i,\beta_i\} + \min\{\alpha_i,\delta_i\} + \min\{\beta_i,\delta_i\}$$
$$= \min\{\alpha_i,\beta_i,\delta_i\} + \alpha_i + \beta_i + \delta_i$$

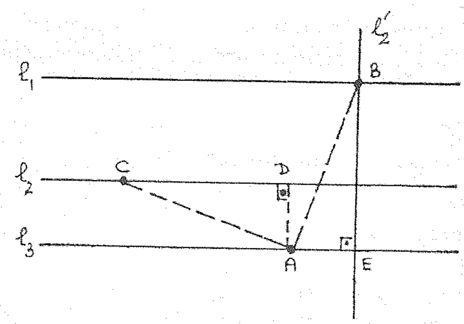
$(i = 1, 2, ...n)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Genelliği bozmadan, sabit tutulmuş bir i için $\alpha_i \leq \beta_i \leq \delta_i$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde ispatlanması gereken şey

$$\delta_i + \alpha_i + \alpha_i + \beta_i = \alpha_i + \alpha_i + \beta_i + \delta_i$$

olur ki, bunun da doğruluğu açıktır.

A.184. Herhangi 3 paralel doğru verilmiş olsun. 3 köşesi bu doğrular üzerinde bulunan bir kare çiziniz.

Çözüm. Doğrulardan biri üzerinde bir nokta (şekilde A noktası) alalım. Sonra l_2 doğrusunu A noktası etrafında 90° döndürelim ve elde edilen doğruya l_2' diyelim. l_2' ile l_1 doğrusunun kesiştiği noktaya B diyelim. İşte, bu B noktası karenin ikinci köşesi olacaktır. Gerçekten, $|AE| = |AD|$ olduğundan şekildeki $\overset{\triangle}{AEB}$ ve $\overset{\triangle}{ADC}$ dik üçgenleri birbirine eşittirler ve buradan $|AC| = |AB|$ olur. ($C\hat{A}B = 90°$ olduğu açıktır.)



A.185. Çevrel çemberinin yarıçapı 1 olan bir üçgenin, iç teğet çemberinin yarıçapı r ve yükseklik ayaklarını köşe alan üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı r' ise, $r' \leq 1 - \frac{1}{3}(1+r)^2$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Bir ABC üçgeninde $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ 'dir. Bu problemde $R = 1$ olduğundan $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + r$ 'dir. ABC üçgeninin diklik merkezi, yükseklik ayaklarını köşe kabul eden $(A'B'C')$ üçgeninin iç merkezidir. Bu iç merkez H ve H 'nin $A'C'$ üzerindeki dik izdüşümü P ile gösterildiğinde, $HP = r'$ 'dür. $A'BH$ üçgeninde, $\tan A'BH = HA'/BA'$ olup $HA' = c \cos B \cot C$ bulunur. $X\hat{A'}H = H\hat{A'}B' = B'\hat{C}H$ ve $\sin X\hat{A'}H = \cos A = r'/HA'$ 'dür.

$$\begin{aligned} r' &= HA' \cos A = c \cos B \cot C \cos A \\ &= \tfrac{c}{\sin C} \cos A \cos B \cos C \\ &= 2 \cos A \cos B \cos C \end{aligned}$$

olur. Şimdi,

$$4 \cos A \cos B \cos C = 2[2 \cos A \cos B] \cos C$$

ifadesini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} &2[2 \cos A \cos B]\cos C \\ &= 2[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \cos C \\ &= 2 \cos(A+B) \cos C + 2 \cos(A-B) \cos C \\ &= \cos(A+B+C) + \cos(A+B-C) \\ &\qquad + \cos(A-B+C) + \cos(A-B-C) \\ &= -1 - \cos(180-2C) - \cos(180-2B) \\ &\qquad - \cos(180-2A) \\ &= -1 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C \\ &= 2 - 2\cos^2 A - 2\cos^2 B - 2\cos^2 C \text{ ve} \end{aligned}$$

$2 \cos A \cos B \cos C = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$,
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$
bulunur. Cauchy eşitsizliğinden,
$\frac{1}{3}(\cos A \cos B \cos C)^2 \le \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$
yazılır ve buradan,

$$\begin{aligned} &r' + \tfrac{1}{3}(1+r)^2 \\ &= 2 \cos A \cos B \cos C + \tfrac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \\ &\le 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Y. 181. Herhangi bir a doğal sayısı ($a > 1$) için $a^{10} + a^5 + 1$ sayısının bir bileşik sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bir yandan,

$$a^{15} - 1 = (a^5)^3 - 1 = (a^5 - 1)(a^{10} + a^5 + 1)$$

ve diğer yandan,

$$a^{15} - 1 = (a^3)^5 - 1 = (a^3 - 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)$$

'dır. Sağ tarafların eşitliğini yazarsak,

$$\begin{aligned} &(a^5 - 1)(a^{10} + a^5 + 1) \\ &\quad = (a^3 - 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1) \end{aligned}$$

olur. Buradan ise (her iki yanı $(a-1)$ ile bölerek),

$$\begin{aligned} &(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^{10} + a^5 + 1) \\ &\quad = (a^2 + a + 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1) \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi, $(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)$ polinomunu $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$ polinomuna bölersek, (siz kendiniz bölmeyi gerçekleştiriniz), bölümde $(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$ polinomunu elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned} &(a^{10} + a^5 + 1) \\ &\quad = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1) \end{aligned}$$

sonucuna varmış oluruz.

(**Çözenler:** *Süleyman Demirel (Ankara), Kerim Has (Sakarya), Murat Ak (Antalya), Emrah Kaplan (Kayseri), Ömer Gürlü (Denizli), Şükrü Azum (İstanbul), Alper Çay (Kayseri)*)

Y. 182. $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomu her tamsayı x için bir tamsayının 4-cü kuvvetine eşit ise, $a = b = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm.

$$\sqrt[4]{P(x+1)} - \sqrt[4]{P(x)} = \frac{\sqrt{P(x+1)} - \sqrt{P(x)}}{\sqrt[4]{P(x+1)} + \sqrt[4]{P(x)}}$$

$$= \frac{P(x+1) - P(x)}{(\sqrt[4]{P(x+1)} + \sqrt[4]{P(x)})(\sqrt{P(x+1)} + \sqrt{P(x)})}$$

özdeşliğinde $P(x+1) - P(x) = a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b$ olduğunu da gözönüne alırsak,

$$0 \le \sqrt[4]{P(x+1)} - \sqrt[4]{P(x)} \le \frac{2ax + a + b}{\sqrt[4]{P(x)}.\sqrt{P(x)}}$$

olur. Eğer a veya b 'den herhangi biri sıfır değilse, yeteri kadar büyük x 'ler için yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı istenildiği kadar küçük yapılabilir. Şimdi, $\sqrt[4]{P(x+1)}$ ve $\sqrt[4]{P(x)}$ sayıları her $x \in \mathbf{N}$ için tamsayı olduklarından, yeteri kadar büyük her $x \in \mathbf{N}$ için

$$\sqrt[4]{P(x+1)} - \sqrt[4]{P(x)} = 0 \Rightarrow P(x+1) = P(x)$$

olur ki, buradan da $a = b = 0$ elde edilir. Çelişki.

(**Çözenler:** *Murat Ak (Antalya), Süleyman Demirel (Ankara)*)

Y.183. $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = 77$ denkleminin tamsayılarda hiç çözümü olmadığını gösteriniz.

Çözüm. Verilen denklem şu şekilde yazılabilir:

$$(x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y)(x + 3y) = 77.$$

77 sayısı, en fazla dört tane farklı tamsayının çarpımı biçiminde yazılabilir. (Örneğin, 77 =

$1.(-1).(-7).11.)$ Oysa, denklemin sol tarafı beş tane tamsayının çarpımıdır. Dolayısıyla, böyle bir eşitlik mümkün değildir.

(**Çözenler:** *Kerim Has (Sakarya), Murat Ak (Antalya), Süleyman Demirel (Ankara), Şükran Arzum (İstanbul)*)

Y.184. Bir ABC üçgeninde h_a, h_b, h_c yükseklikler, l_a, l_b, l_c açıortaylar ve m_a, m_b, m_c kenarortaylar ve r içteğet çemberin yarıçapı olmak üzere,

$$9r \le h_a + h_b + h_c \le l_a + l_b + l_c \le m_a + m_b + m_c$$

eşitsizliklerini kanıtlayınız.

Çözüm. $h_a \le l_a \le m_a$, $h_b \le l_b \le m_b$, $h_c \le l_c \le m_c$ eşitsizlikleri iyi bilinen eşitsizlikler olduğundan onların ispatını size bırakıyoruz. Şimdi bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$h_a + h_b + h_c \le l_a + l_b + l_c \le m_a + m_b + m_c$$

olur. (Eşitlik durumu sadece, ABC üçgeni eşkenar olduğunda mümkündür.) Böylece, $h_a + h_b + h_c \ge 9r$ olduğunu gösterirsek, işimiz biter. Üçgenin alanına S dersek,

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

çıkar. Aritmetik ve harmonik ortalamalar eşitsizliğine göre,

$$\frac{x+y+z}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

'dir. Bu eşitsizliği uygularsak,

$$\frac{h_a+h_b+h_c}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} = \frac{3}{\frac{1}{r}} = 3r$$

olur ki, buradan da $h_a + h_b + h_c \ge 9r$ elde edilir.

(**Çözenler:** *Süleyman Demirel (Ankara)*)

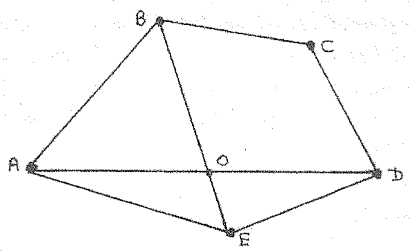
Y.185. Dışbükey $ABCDE$ beşgeninde ABC, BCD, CDE, DEA üçgenlerinin her birinin alanı 2, EAB üçgeninin alanı ise 3 'tür. Beşgenin alanını bulunuz.

Çözüm. Beşgen dışbükey olduğundan, A ve D noktaları BC doğrusunun bir tarafında bulunurlar. ABC ve BCD üçgenlerinin ortak BC kenarlarının varlığından ve alanlarının eşitliğinden, A ve D köşelerinden BC 'ye indirilmiş yüksekliklerinin de birbirine eşit olduğu görülür. Buradan, $BC \| AD$ olur. Benzer şekilde $CD \| BE$ olduğu kanıtlanabilir.

AD ve BE 'nin kesişim noktasına O diyelim. $OB \| CD$ ve $OD \| BC$ olduğundan, $OBCD$ bir paralelkenardır. Buradan $A(\overset{\triangle}{OBD}) = A(\overset{\triangle}{BCD})$ olur. Böylece, beşgenin alanını bulmak için $\overset{\triangle}{AOB}$ üçgeninin alanını bulmak yeter. (Çünkü

$$A(ABCDE) = A(\overset{\triangle}{AOB}) + A(\overset{\triangle}{BOD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) + A(\overset{\triangle}{ADE})$$

'dir.)



Şimdi, $ABDE$ dörtgenini ele alalım.

$$A(\overset{\triangle}{AOB}).A(\overset{\triangle}{DOE}) = A(\overset{\triangle}{AOE}).A(\overset{\triangle}{BOD})$$

eşitliğinde (ki bu eşitliği sizin kanıtlamanızı istiyoruz) $A(\overset{\triangle}{AOB}) = x$ diyerek,

$$A(\overset{\triangle}{AOE}) = A(\overset{\triangle}{ABE}) - A(\overset{\triangle}{AOB}) = 3 - x,$$

$$A(\overset{\triangle}{DOE}) = A(\overset{\triangle}{DEA}) - A(\overset{\triangle}{AOE}) = 2 - (3 - x) = x - 1$$

değerlerini de gözönüne alırsak, x için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$x.(x-1) = (3-x).2 \ .$$

Buradan, $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ve dolayısıyla, $A(ABCDE) = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ olur.

(**Çözenler:** *Oğuz Kamer Doğan (Denizli), Süleyman Demirel (Ankara), Ömer Gürlü (Denizli), Cemal Özboğa (Kocaeli), Murat Ak (Antalya)*)