BİR ÜÇGENİN ELEMANLARI ARASINDAKİ BAZI EŞİTLİK VE EŞİTSİZLİKLER I

Mehmet Şahin

Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, ANKARA

Düzlem geometride üzerinde çok çalışılan konulardan biri de, bir üçgenin elemanları arasındaki bazı eşitsizliklerdir. Öncelikle yazıda kullandığımız bazı gösterimleri tanımlayalım:

R: çevrel çember yarıçapı; r: içteğet çember yarıçapı; s: yarı çevre; F: alan; a,b,c: üçgenin BC,AC,AB kenarlarının uzunlukları; α, β, γ : üçgenin iç açıları; r_a, r_b, r_c : dış teğet çemberlerin yarıçapları; h_a, h_b, h_c : üçgenin yükseklikleri; m_a, m_b, m_c : üçgenin kenarortayları; w_a, w_b, w_c : üçgenin açıortayları.

Önerme: 1.1. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de $ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4Rr$ 'dir.

Kanıt: $a + b + c = 2s$, $abc = 4RF$, $(s-a)(s-b)(s-c) = \dfrac{F^2}{s}$, $F = rs$ olduğundan

$$\frac{F^2}{s} = s^3 - s^2(a+b+c) + s(ab+ac+bc) - abc$$

$$\frac{r^2 s^2}{s} = s^3 - s^2 2s + s(ab+ac+bc) - 4RF$$

$$r^2 s = s^3 - 2s^3 + s(ab+ac+bc) - 4Rrs$$

$$ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4Rr$$

bulunur.

Teorem 1.2. [3] Her üçgende aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} = 2\frac{R}{r} - 1 \tag{1}$$

$$a\tan\frac{\alpha}{2} + b\tan\frac{\beta}{2} + c\tan\frac{\gamma}{2} = 4R - 2r \tag{2}$$

Kanıt:

$$r_a = \frac{rs}{s-a},\ r_b = \frac{rs}{s-b},\ r_c = \frac{rs}{s-c} \text{ ve } h_a = \frac{2F}{a},\ h_b = \frac{2F}{b},\ h_c = \frac{2F}{c} \tag{3}$$

olduğundan

$$\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\right)$$

$$=\frac{(a+b+c)s^2+3abc-2s(ab+ac+bc)}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

'dir. Önerme 1.1 'de verilen eşitlik kullanılırsa

$$\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=\frac{2ss^2+3\cdot 4RF-2s(r^2+s^2+4Rr)}{2\dfrac{F^2}{s}}$$

$$=\frac{12RF-2sr^2-8Rrs}{2Fr}=\frac{12RF-2Fr-8RF}{2Fr}$$

$$=\frac{4RF-2Fr}{2Fr}=2\frac{R}{r}-1$$

bulunur. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$, $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-b}$, $\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}$ olduğundan

$$a\tan\frac{\alpha}{2}+b\tan\frac{\beta}{2}+c\tan\frac{\gamma}{2}=r\left(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\right)=r\left(\frac{4R}{r}-2\right)=4R-2r$$

sağlanır.

Sonuç 1.3. Her üçgende $\sum\frac{r_a}{h_a}\geq 3$ 'tür.

Kanıt: (1) 'de kanıtladığımız eşitlikte Euler eşitsizliği denilen $R\geq 2r$ kullanılırsa

$$\sum\frac{r_a}{h_a}=\frac{2R}{r}-1\geq 3$$

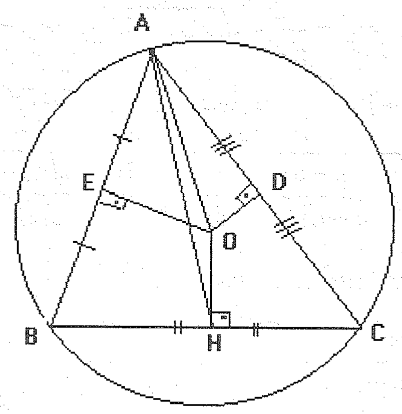
elde edilir.

Teorem 1.4. [3] Her üçgende

$$3\leq\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leq 1+\frac{R}{r} \tag{4}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt: $m_a \geq h_a$, $m_b \geq h_b$, $m_c \geq h_c$ olduğundan eşitsizliğin sol yanı açıktır. Diğer yan için şekilde $|OH| = p_a$, $|OD| = p_b$, $|OF| = p_c$ ise $|OA| = R$, $|AH| = m_a$, $|BD| = m_b$ ve $|CE| = m_c$ olduğundan



$\overset{\Delta}{OAH}$ üçgeninde $m_a \leq p_a + R$, $\overset{\Delta}{OBD}$ üçgeninde $m_b \leq p_b + R$, $\overset{\Delta}{OEC}$ üçgeninde $m_c \leq p_c + R$ olur. Bu eşitsizlikler sırasıyla a, b, c ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$a m_a + b m_b + c m_c \leq R(a+b+c) + a p_a + b p_b + c p_c$$

olur. Ayrıca $m(B\hat{A}C) = \alpha$ ise $m(B\hat{O}C) = 2\alpha$ olduğundan alan bağıntısından $\overset{\Delta}{OBC}$ 'de $a p_a = R^2 \sin 2\alpha$ dır. Benzer şekilde $b p_b = R^2 \sin 2\beta$ ve $c p_c = R^2 \sin 2\gamma$ bulunur. Bu son eţitliklerden

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{2F}{R^2}$$

olup,

$$a m_a + b m_b + c m_c \leq R2s + R^2 \frac{2F}{R^2} = 2s(R+r)$$

'dir. O halde

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} = \frac{1}{2F}(a m_a + b m_b + c m_c) \leq \frac{2s(R+r)}{2F} = 1 + \frac{R}{r}$$

çıkar.

Teorem 1.5. Her üçgende

(i) $27r^2 \le h_a w_a + h_b w_b + h_c w_c \le s^2$ (5)

(ii) $27r^2 \le h_a m_a + h_b m_b + h_c m_c \le s^2$ (6)

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt (i):

$$w_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}\ ,\ w_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}\ ,\ w_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)} \qquad (7)$$

eşitliklerini biliyoruz. $P := h_a w_a + h_b w_b + h_c w_c$ diyelim. (3) ve (7) 'den

$$P = 4F\left[\frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{a(b+c)} + \frac{\sqrt{acs(s-b)}}{b(a+c)} + \frac{\sqrt{abs(s-c)}}{c(a+b)}\right]$$

olur. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğine göre

$$P \ge 12F\left[\frac{Fs}{(b+c)(a+c)(a+b)}\right]^{1/3} \Rightarrow P \ge 12F\frac{(s^2r)^{1/3}}{[(b+c)(a+c)(a+b)]^{1/3}}$$

'dür. Ayrıca

$$\frac{4s}{3} = \frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{3} \ge [(b+c)(a+c)(a+b)]^{1/3} \qquad (8)$$

Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğinden

$$\frac{2s}{3} = \frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$$

olup

$$\frac{2s}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{8s^3}{27} \ge 4RF = 4Rrs$$

$2s^2 \ge 27Rr$ ve $R \ge 2r$ olduğundan

$$s^2 \ge 27r^2 \qquad (9)$$

elde edilir. (8) ve (9) 'dan $P \ge 27r^2$ bulunur.

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafını kanıtlayalım. Kanıtı yaparken $\forall x, y, z > 0$ için $(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$ eşitsizliğini kullanacağız.

$$x = \frac{4F\sqrt{bcs(s-a)}}{a(b+c)}\ ,\ y = \frac{4F\sqrt{acs(s-b)}}{b(a+c)}\ ,\ z = \frac{4F\sqrt{abs(s-c)}}{c(a+b)} \qquad (10)$$

denilirse

$$x+y+z \le \sqrt{3s}\,4F\left[\frac{bc(s-a)}{a^2(b+c)^2}+\frac{ac(s-b)}{b^2(a+c)^2}+\frac{ab(s-c)}{c^2(a+b)^2}\right]^{1/2} \tag{11}$$

olur. Ayrıca $b+c \ge 2\sqrt{bc}$, $a+c \ge 2\sqrt{ac}$, $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ eşitsizliklerinden

$$a^2(b+c)^2 \ge 4a^2bc \ , \ b^2(a+c)^2 \ge 4b^2ac \ , \ c^2(a+b)^2 \ge 4c^2ab$$

olup (10) 'da yerine yazılırsa

$$x+y+z \le 2F\sqrt{3s}\left[\frac{(s-a)}{a^2}+\frac{(s-b)}{b^2}+\frac{(s-c)}{c^2}\right]^{1/2}$$

$$\le 2F\sqrt{3s}\left[\frac{b^2c^2(s-a)+a^2c^2(s-b)+a^2b^2(s-c)}{a^2b^2c^2}\right]^{1/2}.$$

$abc = 4RF$ yerine yazılırsa

$$x+y+z \le \frac{\sqrt{3s}}{2R}\left[s(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)-abc(ab+ac+bc)\right]^{1/2}$$

bulunur. Önerme 1.1 yardımıyla kolayca

$$b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2 = r^4+s^4+16R^2r^2+2r^2s^2+8Rr^3-8RFs \tag{12}$$

eşitliği gösterilebilir. O halde Önerme 1.1 ve (12) 'den

$$x+y+z \le \frac{\sqrt{3s}}{2R}\left[s(r^4+s^4+16R^2r^2+2r^2s^2+8Rr^3-8RFs)-4RF(r^2+s^2+4Rr)\right]^{1/2}$$

'dir. Ayrıca $s^2 \ge 27r^2$ ve [1] 'den $2s = a+b+c \le 3R\sqrt{3}$ olduğundan $x+y+z \le s^2$ elde edilir. $a=b=c$ olması durumunda eşitlik sağlanır.

(ii) (3) 'deki yükseklik bağıntıları ile birlikte

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \ , \ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} \ , \ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

eşitlikleri kullanılarak (i) 'deki yöntemle gösterilebilir.

Teorem 1.6. Her üçgende

$$3^{\frac{n+3}{2}}2^n r^n \le a^n \cot\frac{\alpha}{2}+b^n\cot\frac{\beta}{2}+c^n\cot\frac{\gamma}{2} \le \frac{4s^2}{3}\sqrt{a^{2n-4}+b^{2n-4}+c^{2n-4}} \tag{13}$$

'tür. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olması ve $n=1$ olmasıdır.

Kanıt: $P := a^n \cot\frac{\alpha}{2} + b^n \cot\frac{\beta}{2} + c^n \cot\frac{\gamma}{2}$ diyelim.

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\ ,\quad \cot\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}\ ,\quad \cot\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} \qquad (14)$$

olduğundan Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğine göre

$$P \geq 3\left[(abc)^n \frac{s}{r}\right]^{1/3} \qquad (15)$$

$$s^2 \geq 27r^2 \ ([1],5.11) \quad 4F\sqrt{3} \leq \frac{9abc}{a+b+c} \ ([1],4.13) \qquad (16)$$

eşitsizlikleri yardımıyla

$$P \geq 3^{\frac{n+3}{2}} 2^n r^n$$

elde edilir. Böylece (12) 'nin sol tarafı kanıtlanmış olur. Diğer tarafın kanıtı için (10) eşitsizliğini kullanacağız.

$$x = a^n \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\ ,\quad y = b^n \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}\ ,\quad z = c^n \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

denilirse

$$P = x + y + z = a^n \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} + b^n \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} + c^n \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

ve (10) 'dan

$$P \leq \sqrt{3}\left[\frac{a^{2n}s(s-a)}{(s-b)(s-c)} + \frac{b^{2n}s(s-b)}{(s-a)(s-c)} + \frac{c^{2n}s(s-c)}{(s-a)(s-b)}\right]^{1/2}$$

'dir. $\frac{a}{2} = \frac{(s-b)+(s-c)}{2}$ ve Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğinden

$$\frac{a}{2} = \frac{(s-b)+(s-c)}{2} \geq \sqrt{(s-b)(s-c)}$$

olup, bu ise $(s-b)(s-c) \leq \frac{a^2}{4}$ olmasını gerektirir. Benzer şekilde

$$(s-a)(s-c) \le \frac{b^2}{4}$$
$$(s-b)(s-a) \le \frac{c^2}{4} \tag{17}$$

dır. Bu eşitsizlikler yardımıyla

$$P \le \sqrt{3s}\left[a^{2n}(s-a)\frac{4}{a^2} + b^{2n}(s-b)\frac{4}{b^2} + c^{2n}(s-c)\frac{4}{c^2}\right]^{1/2}$$

ve ([2], 1.1) 'den

$$a^{\lambda}(s-a) + b^{\lambda}(s-b) + c^{\lambda}(s-c) \le \frac{1}{2}abc(a^{\lambda-2} + b^{\lambda-2} + c^{\lambda-2}) \quad (\lambda \in R)$$

eşitsizliğine göre

$$P = x + y + z \le 2\sqrt{3s}\left[\frac{1}{2}abc(a^{2n-4} + b^{2n-4} + c^{2n-4})\right]^{1/2}$$

$abc = 4RF$, (9) ve ([1],5.3) 'den $2s = a + b + c \le 3R\sqrt{3}$ eşitsizliği yardımıyla

$$P \le \frac{4s^2}{3}\sqrt{a^{2n-4} + b^{2n-4} + c^{2n-4}}$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. Üçgen eşkenar ve n=1 için eşitlik sağlanır.

Teorem 1.7. Her üçgende

$$3^{\frac{n+1}{2}} 2^n r^n \le a^n \tan\frac{\alpha}{2} + b^n \tan\frac{\beta}{2} + c^n \tan\frac{\gamma}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{4F}\sqrt{a^{2n+4} + b^{2n+4} + c^{2n+4}}. \tag{18}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar ve n=1 olmasıdır.

Kanıt:

$$P := a^n \tan\frac{\alpha}{2} + b^n \tan\frac{\beta}{2} + c^n \tan\frac{\gamma}{2}$$

olsun.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$$

değerleri P deki yerine yazılıp Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği uygulanırsa;

$$P \ge \sqrt{3}(abc)^{n/3} \tag{19}$$

elde edilir. $2s = a + b + c \le 3R\sqrt{3}$ ([1],5.3), (10) ve $R \ge 2r$ (Euler eşitsizliği) yardımıyla (19) eşitsizliği

$$p \geq 3^{\frac{n+1}{2}} 2^n r^n$$

biçimine dönüşür. Bu ise (18) 'in sol yanıdır. Diğer yan için $x = \frac{a^n r}{s-a}$, $y = \frac{b^n r}{s-b}$, $z = \frac{c^n r}{s-c}$ diyelim. Buradan

$$p = r\left[\frac{a^n}{s-a} + \frac{b^n}{s-b} + \frac{c^n}{s-c}\right]$$

$$= r\left[\frac{a^n(s-b)(s-c) + b^n(s-a)(s-c) + c^n(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right]$$

$abc = 4RF$, $(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{F^2}{s}$, (17) ve (10) eşitsizliği kullanılarak

$$x + y + z \leq r\left[\frac{a^n \frac{a^2}{4} + b^n \frac{b^2}{4} + c^n \frac{c^2}{4}}{\frac{F^2}{s}}\right]$$

$$\leq \frac{1}{4F}(a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2})$$

ve (10) eşitsizliği kullanılırsa

$$x + y + z \leq \frac{\sqrt{3}}{4F}(a^{2n+4} + b^{2n+4} + c^{2n+4})^{1/2}$$

olur. Üçgen eşkenarsa ve n=1 ise eşitlik sağlanır.

KAYNAKLAR

[1] Bottema and Oth., Geometric Inequalities, Groningen 1969.

[2] Radosav Z. Dordevic, Some Inequalities for Triangle, Publications de la Faculté d'electrotechnique de L'Université a Belgrade, No: 247-No: 273 (1969) 35-39.

[3] S. Arslanagic and D.M. Milosevic, Some Inequalities for a Triangle, Radovi Matematicki, 2(1986) 35-44.