VI. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI İKİNCİ AŞAMA SINAVI SORULARI VE ÇÖZÜMLERİ

Dergimizin sekizinci cildinin birinci sayısında VI. Ulusal Matematik Olimpiyadı İkinci Aşama Sınavı Sorularını yayınlamıştık. Aşağıda, bu soruları ve çözümlerini sunuyoruz.

Soru 1. İkizkenar ABC üçgeninin $(|AB| = |AC|)[BC]$ tabanı üzerinde $|BD| : |DC| = 2 : 1$ olacak biçimde bir D noktası, $[AD]$ üzerinde ise $m(B\hat{A}C) = m(B\hat{P}D)$ olacak biçimde bir P noktası alınıyor. $m(D\hat{P}C) = m(B\hat{A}C)/2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. C noktasının AD doğrusuna göre simetriği C_1, B noktasından AD doğrusuna indirilen dikmenin ayağı Q ; A noktasından $[BC]$ ye çizilen yüksekliğin ayağı O olsun. (Şekilden izleyiniz.)

$$CC_1//BQ, \quad |BD| : |DC| = |BQ| : |CR| = 2 : 1$$

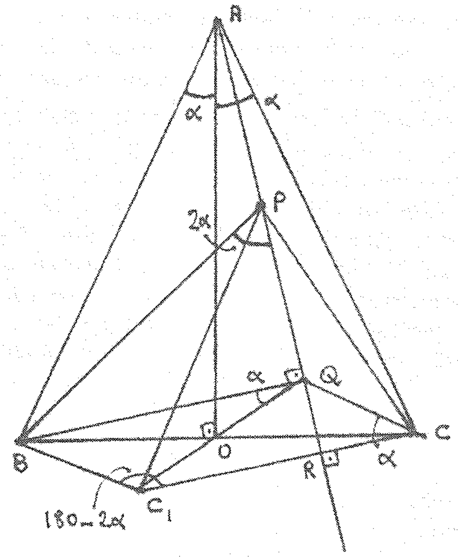
olduğu için $BQCC_1$ bir paralelkenardır ve $|BC_1| = |QC| = |C_1Q|$ 'dur.

Şimdi, $m(B\hat{A}C) = 2\alpha$ olsun. Bu takdirde, $m(B\hat{P}D) = 2\alpha$, $m(B\hat{A}O) = \alpha$ olur ve B, O, Q, A noktaları çembersel olduğu için $m(B\hat{Q}O) = m(Q\hat{B}C_1) = m(Q\hat{C}C_1) = \alpha$ olur. Diğer yandan, $m(B\hat{C_1}Q) = 180 - 2\alpha$ ve $m(B\hat{P}Q) = 2\alpha$ olduğundan, B, P, Q, C_1 noktalarının çembersel olduğu ve böylece, $m(Q\hat{P}C_1) = m(Q\hat{B}C_1) = \alpha$ olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$m(C\hat{P}D) = m(C_1\hat{P}D) = m(Q\hat{P}C_1)$$

$$= \alpha = \frac{1}{2}m(B\hat{A}C)$$

olduğu görülür.



Soru 2. Tüm $0 \leq a \leq b \leq c$ gerçel sayıları için

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm (2.1). Önce

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) - (a+3b)(b+2a)(c+4c)$$
$$= (a+3b)((b+4c)(c+2a) - (b+2a)(c+4c))$$
$$= (a+3b)\underbrace{(b-c)}_{\leq 0}\underbrace{(2a-4c)}_{\leq 0} \geq 0 \text{ ve}$$

$$(a+3b)(b+2a) - (a+2a)(b+3b)$$
$$= \underbrace{(a-b)}_{\leq 0}\underbrace{(2a-3b)}_{\leq 0} \geq 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq (a+3b)(b+2a)(5c)$$
$$\geq (3a)(4b)(5c) = 60abc \text{ 'dir.}$$

Çözüm (2.2). Aritmetik-geometrik ortalamalar eşitsizliğinden, $a + 3b \geq 2\sqrt{3ab}$, $b + 4c \geq 2\sqrt{4bc}$,

$c+2a \geq 2\sqrt{2ac}$ 'dir. Taraf tarafa çarparsak, $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 32\sqrt{6}abc > 77abc > 60abc$.

Soru 3. Bir çemberin üstündeki noktalar üç renge boyanıyor. Köşelerini çember üstünde aynı renge boyanmış noktaların oluşturduğu sonsuz sayıda ikizkenar üçgenin bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Köşeleri çember üstünde bulunan herhangi bir düzgün 13-gen alalım. Bu 13-genin aynı renge boyanmış en az beş köşesi vardır. Bu beş köşeden en az üçünün ikizkenar bir üçgen oluşturduğunu göstereceğiz. Bu ise, $Z_{13} = \{1, ..., 13\}$ kümesinin 5 elemanlı herhangi bir P altkümesinde $x \neq y$, $x+y \equiv 2z \pmod{13}$ olacak biçimde $x, y, z \in P$ bulunduğunu göstermeye eşdeğerdir. Son önermenin doğru olmadığını farzedelim.

$$S = \{x+y \pmod{13} | x, y \in P, x \neq y\}$$

dersek, S 'nin en az 9 değişik elemanının olduğu görülür. ($P = \{x, y, z, u, v\}$ olsun ve $x+y \equiv z+u$ olduğunu varsayalım. Bunun dışında P 'den alınan iki değişik çiftin toplamları (mod 13) eşitse, genelliği yitirmeden, bunun $z+y \equiv x+v$ biçiminde olacağı görülür. O zaman da, varsayımımızın aksine, $u+v \equiv 2y$ olur.) Ancak bu durumda da, S 'ye ait en az bir eleman $\{2x, 2y, 2z, 2u, 2v\}$ kümesine aittir.

Soru 4. $x^3 + 3367 = 2^n$ eşitliğini sağlayan tüm x ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Çözüm. 3367 nin asal çarpanlarına ayrılışı 3367=7.13.37 'dir. Eğer $x^3 \equiv 2^n \pmod 7$ ise, uygun bir $m \in N$ için $n = 3m$ olur. Böylece,

$$3367 = 2^n - x^3 = \underbrace{(2^m - x)}_{a}\underbrace{(2^{2m} + 2^m x + x^2)}_{b},$$

$$a^2 < b \text{ ve } ab = 7.13.37$$

olduğu için aşağıdakilerden biri doğrudur:

(i) $a = 1$, $b = 7.13.37$,

(ii) $a = 7$, $b = 13.37$,

(iii) $a = 13$, $b = 7.37$.

$b - a^2 = 3.2^m.x$, $2^m \geq \sqrt[3]{3367} > 14$ olduğu için

(i) $b - a^2 = 3.2.561$ ve

(iii) $b - a^2 = 90 = 2.3.15$ geçerli olamaz; ancak (ii) durumu sözkonusu olabilir. Bu durumda $b - a^2 = 481 - 49 = 432 = 3.2^4.3^2$ olduğunda $n = 12, x = 9$ olmalı. Gerçekten $9^3 + 3367 = 2^{12}$ 'dir.

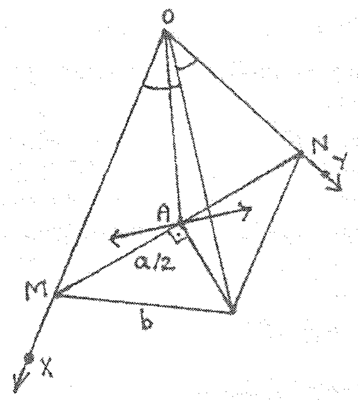
Soru 5. XOY açısının $[OX$ ve $[OY$ ışınları üzerinde sırasıyla M ve N değişken noktaları alındığında, $|OM| + |ON|$ sabit ise, $[MN]$ 'nin orta noktasının geometrik yerini belirleyiniz.

Çözüm. $[MN]$ 'nin bir konumu şekildeki gibi olsun ve $|OM| = m$, $|ON| = n$, $|MN| = a$ diyelim. OMN üçgeninin çevrel çemberi ile MON açısının açıortayının kesişim noktası B ile gösterilmek üzere, $MOB = 2\alpha$ ise,

$$(\overset{\frown}{MB}) = (\overset{\frown}{BN}) = 2\alpha$$

'dır. Buradan $|MB| = |BN|$ elde edilir. $OMBN$ dörtgenine Ptolemy Teoremi uygulandığında, $|BM| = b$ olmak üzere,

$$|OM|.|BN| + |ON||MB| = |OB|.|MN|$$



ya da $m.b + n.b = |OB|.a$ elde edilir. Buradan

$$b(m+n) = |OB|.a, \quad b.k = |OB|.a \quad . \qquad (1)$$

$[MN]$ 'nin orta noktası A ile gösterilmek üzere, $M\hat{A}B = 90°$ ve $B\hat{O}N$ ile aynı yayı gördükleri için $M\hat{N}B = \alpha$ olur. Bu dik üçgende, $\cos\alpha = \frac{a}{2b}, a = 2b\cos\alpha$ 'dır. Bu değer (1) 'de yazılarak,

$$b.k = |OB|.2b.\cos\alpha \Rightarrow |OB| = \frac{k}{2\cos\alpha} = sabit$$

elde edilir. O noktası, $|OB|$ ve açıortay sabit olduğundan B noktası sabittir. OMN üçgeninde $[OA]$ kenarortay olup,

$$|OA|^2 = \frac{m^2+n^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \qquad (2)$$

MBN üçgeninde $[BA]$ kenarortay olup,

$$|BA|^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}, \qquad (3)$$

'tür. (2) ve (3) 'ten

$$|OA|^2 - |BA|^2 = \tfrac{m^2+n^2}{2} - b^2. \qquad (4)$$

$\overset{\Delta}{OMB}$ 'nde, $b^2 = m^2 + (\frac{k}{2\cos\alpha})^2 - 2m\frac{k}{2\cos\alpha}\cos\alpha$,

$\overset{\Delta}{ONB}$ 'nde, $b^2 = n^2 + (\frac{k}{2\cos\alpha})^2 - 2n\frac{k}{2\cos\alpha}\cos\alpha$ 'dır (Kosinüs Teoremi). Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak,

$$2b^2 = m^2 + n^2 + 2(\tfrac{k}{2\cos\alpha})^2 - k^2,$$

$$b^2 = \tfrac{m^2+n^2}{2} + (\tfrac{k}{2\cos\alpha})^2 - \tfrac{k^2}{2}$$

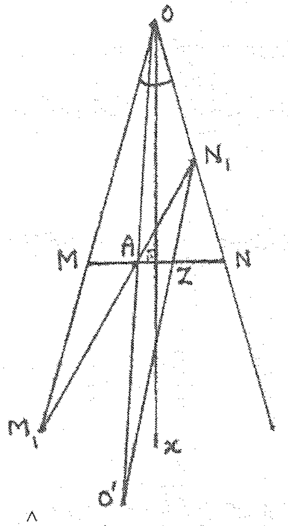
$$\Rightarrow \tfrac{m^2+n^2}{2} - b^2 = \tfrac{k^2}{2} - (\tfrac{k}{2\cos\alpha})^2 = \text{sabit}$$

bulunur. O halde (4) ifadesi

$$|OA|^2 - |BA|^2 = \text{sabittir.}$$

"Sabit iki noktaya uzaklıklarının kareleri farkı sabit olan noktaların geometrik yeri, bu sabit noktaları birleştiren doğruya dik bir doğrudur." Dolayısıyla, A noktasının geometrik yeri, OB doğrusuna dik bir doğrudur.

Tersine, $|OM| = |ON| = \frac{k}{2}$, Ox açıortay, $MN \perp Ox$, $A \in [MN]$ olsun. $\overset{\Delta}{OM_1N_1}$ üçgeninin $[M_1N_1]$ kenarının orta noktası A ise, $|OM_1| + |ON_1| = k$ olur. Çünkü, A 'yı orta nokta kabul edecek $[M_1N_1]$ 'in çizimi, O 'nun A 'ya göre simetriği olan O' bulunup $OM_1O'N_1$ paralelkenarının oluşturulması ile mümkündür. Bu durumda $O'N_1//OM_1$, $\overset{\wedge}{OMN}=\overset{\wedge}{N_1ZN}$ ve $\overset{\Delta}{OMN}$ ikizkenar olduğundan,



$\overset{\wedge}{N_1ZN}=\overset{\wedge}{N_1NZ} \Rightarrow |N_1Z| = |N_1N|$

$|OM_1| = |OM| + |MM_1|$ ve $\overset{\Delta}{M_1MA} \cong \overset{\Delta}{N_1ZA}$ olduğundan

$$|MM_1| = |N_1Z| = |N_1N| ,$$

$$|ON_1| = |ON| - |NN_1| \text{ 'dir.}$$

Bu eşitliklerden,

$|OM_1| + |ON_1|$

$= |OM| + |MM_1| + |ON| - |MM_1|$

$= |OM| + |ON| = k$ bulunur.

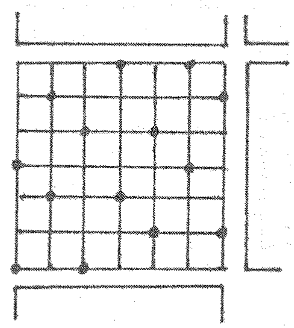
Soru 6. $n \times n$ bir satranç tahtasındaki karelerin köşelerinden bazıları, bu satranç tahtasının karelerinden oluşan her $k \times k$ $(1 \leq k \leq n)$ karenin en az bir kenarının üstünde boyanmış bir nokta olacak biçimde boyanıyor. Eğer bu koşulu sağlamak için boyanması gereken en az nokta sayısını $l(n)$ ile gösterirsek,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Şekilde görülen boyanmış parçayı kaydırarak boyama işlemini sürdürürsek $n = 7k+6$, $k \geq 0$, için

$$l(n) \leq \frac{2}{7}(n+1)^2$$



olduğunu görürüz. Eğer $n = 7k + s$, $0 \leq s < 6$ ise, $n = 7(k-1) + 6 + (s+1)$ ve $m = 7(k-1) + 6$ yazalım. Bu takdirde, $n \times n$ karenin içinde, $m \times m$ karenin dışında kalan tüm noktaların boyandığı varsayılsa dahi,

$$l(n) \leq l(m) + (s+1)n + (s+1)m < l(m) + 12n,$$

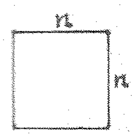
$$l(n) < \tfrac{2}{7}(m+1)^2 + 12n < \tfrac{2}{7}(n+1)^2 + 12n$$

olduğu görülür. Dolayısıyla her $n \geq 6$ için

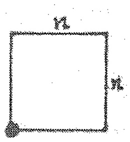
$$\frac{l(n)}{n^2} \leq \frac{2}{7}\frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{12}{n} \qquad (*)$$

'dir.

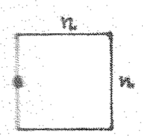
Şimdi, bir kare alalım. (Bak: Şekil 1). Bir 1×1 karenin kenarları üzerindeki boyanmış nokta sayısı t olsun. Problemin koşulu gereği $t \geq 1$ 'dir. Her 1×1 kare için $\frac{1}{t}$ sayısına o karenin **ağırlığı** diyelim. Boyanmış bir nokta alalım. Bu nokta ile kesişen tüm 1×1 karelerin ağırlıklar toplamına o noktanın **puanı** diyelim. Bu takdirde, boyanmış her bir noktanın puanı, nokta tam köşede ise (Bak: Şekil 2), ≤ 1; nokta bir kenar üzerinde ise (Bak: Şekil 3), ≤ 2 ve eğer nokta karenin içinde ise (Bak: Şekil 4), o noktanın puanı $\leq \frac{7}{2}$ 'dir. (Son durumda, eğer dört kareden üçünün ağırlığı 1 ise, 2×2 karenin kenarında en az bir boyanmış nokta bulunacağından, dördüncü karenin ağırlığı $\leq \frac{1}{2}$ olmalı ve böylece, sözkonusu noktanın puanı $\leq 3.1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ eşitsizliğini sağlamalıdır.)



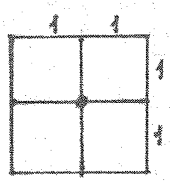
Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3



Şekil 4

Diğer yandan, her bir 1×1 karenin boyanmış noktaların puanına yaptığı katkıların toplamı 1 'dir. Çünkü, bir 1×1 kare üzerinde t tane boyanmış nokta varsa, karenin puanlara yapmış olduğu katkı

$$\frac{1}{t} + \cdots + \frac{1}{t} = t.\frac{1}{t} = 1$$

olur. Demek ki, boyanmış noktaların puan toplamı n^2 'dir.

Şimdi, $l(n)$ tane boyanmış nokta ve her boyanmış noktanın puanı $\leq \frac{7}{2}$ olduğuna göre,

$$n^2 \leq \frac{7}{2}l(n) \Rightarrow \frac{l(n)}{n^2} \geq \frac{2}{7} \qquad (**)$$

olduğunu görürüz. $(*)$ ve $(**)$ birleştirilirse,

$$\frac{2}{7} \leq \frac{l(n)}{n^2} \leq \frac{2}{7}\frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{12}{n}$$

elde edilir ve Sandviç Teoremi ile

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(n)}{n^2} = \frac{2}{7}$$

olduğu görülür.

ŞAKAMATİK = (İşlem yanlış, sonuç doğru!)

$$\frac{8}{2} - \frac{9}{3} = \frac{8-9}{2-3}\ ; \quad \frac{5}{3} - \frac{9}{9} = \frac{5-9}{3-9};$$

$$\frac{24}{2} - \frac{49}{7} = \frac{24-49}{2-7}\ ;$$

$$\frac{19}{95} = \frac{199}{995} = \frac{1999}{9995} = \frac{1}{5}\ ;$$

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}\ ; \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}\ ;$$

$$\frac{1\overbrace{66...6}^{1999}}{\underbrace{66...6}_{1999}4} = \frac{1}{4}\ ;$$

$$\frac{4\overbrace{99...9}^{1999}}{\underbrace{99...9}_{1999}8} = \frac{4}{8}\ ;$$

$$\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}\ ;$$

$$\frac{3\frac{1}{4}}{4\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

"Kvant" 'tan derlenmiştir.
