ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLERİN 1001 ÖZELLİĞİ

İlham Aliyev
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Bizlerden herhangi birimizin aritmetik dizi ile ilk tanışıklığı 1 'den 10 'a kadar saymayı öğrendiğimiz andan başlar. Geometrik dizi ile tanışıklık nispeten geç başlar: 2 'nin ardışık kuvvetlerini hesaplamak "aşkına düştüğümüz" andan. Böylece, matematiğe yakın veya uzak bizler -hepimiz-, belli bir ölçüde, aritmetik (geometrik) dizi "uzmanıyız". Öyleyse, doğal olarak ortaya şöyle bir soru çıkıyor: Matematiğin 100 yıllardan bu yana çok iyi bilinen bir dalında matematikseverlerin ilgisini çekebilecek sorular bulmak mümkün müdür? Evet, mümkündür! Buna inanmak isteyen okurumuza bu yazıyı -sabırla- sonuna kadar okumasını tavsiye ediyorum.

BİRAZ TEORİ ...

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \cdots$ dizisinin, ikinciden başlayarak her terimi, bir önceki terim üzerine aynı bir sabit eklemesiyle elde edilirse, bu diziye bir aritmetik dizi denir:

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d, \ldots\ a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

Böylece, aritmetik dizinin n. terimi $a_n = a_1 + (n-1)d$ formülü ile bulunabilir. Burada a_1 'e ilk terim ve d 'ye dizi farkı denir.

Örnekler: **(1)** $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \quad (a_1 = 1; d = 1)$;
(2) $-2,5; -1,5; -0,5; 0,5, \ldots \quad (a_1 = -2,5; d = 1)$;
(3) $5, 5, 5, \ldots (a_1 = 5; d = 0)$

Aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı formülü.

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$$

(Bu formülü kanıtlamanın bir yolu şöyledir:
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ ve $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$ eşitliklerini taraf-tarafa toplarsak, $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$ olur. Diğer yandan, her $1 \le k \le n$ için $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ olduğundan $2S_n = n(a_1 + a_n)$ ve $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$ olur.)

Aritmetik diziyi nitelendiren özellik. $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ dizisinin bir aritmetik dizi olması için gerek ve yeter koşul, her $k = 2, 3, \cdots, (n-1)$ için $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

(Gerçekten, söz konusu eşitlik sağlanırsa, $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$ ve buradan da $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1} = \cdots = a_2 - a_1 = d$ olur ki, bu da (a_k) dizisinin bir aritmetik dizi olduğunu gösterir. Koşulun gerekliliğini siz gösteriniz.)

Sonuç. Her $1 \le i < k$ için $a_k = \frac{a_{k-i} + a_{k+i}}{2}$ 'dir. Yani, aritmetik dizinin k.terimi, kendisinden "sağda" ve "solda" aynı "uzaklıkta" bulunan komşularının aritmetik ortalamasına eşittir.

Bu sonucu kullanarak aşağıdaki problemleri çözmek zor değil:

Problem 1. Aritmetik dizinin 63.terimi sıfır ise, ilk 125 terimin toplamı nedir? (Yanıt: Sıfır; 63.terimin ilk 125 terimin tam ortasında bulunduğuna dikkat ediniz.)

Problem 2. Bir aritmetik dizinin ilk k terimin toplamına S_k diyelim. Eğer bir n ve bir $m \neq n$ için $S_n = S_m = 1999$ ise, S_{n+m} neye eşittir? (Yanıt: Sıfır)

Geometrik dizi. $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots$ dizisinin, ikinciden başlayarak her terimi bir önceki terimi aynı bir sabitle çarpmakla elde edilirse, bu diziye geometrik dizi denir:

$$b_2 = b_1.q,\ b_3 = b_2.q = b_1.q^2,\ b_4 = b_3.q = b_1.q^3, \ldots, b_n = b_{n-1}.q = b_1.q^{n-1}.$$

Böylece, geometrik dizinin n. terimi $b_n = b_1.q^{n-1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, formülü ile bulunabilir. Burada b_1'e dizinin ilk terimi ve q'ye ise dizi çarpanı denir.

Örnekler: (1) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ $(b_1 = 1; q = 2)$;
(2) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{18}, \ldots$ $(b_1 = -\frac{1}{2}; q = -\frac{1}{3})$;
(3) $5, 5, 5, \ldots$ $(b_1 = 5; q = 1)$

Geometrik dizinin ilk n teriminin toplamı formülü.

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = b_1.\frac{1-q^n}{1-q}\ , \ (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Bu formülü ispatlamak için, önce çok önemli olan $(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = 1-q^n$ özdeşliğinin doğruluğundan emin olmalısınız: parantezleri açın ve sadeleştirme yapın; bundan sonrası "çocuk oyunu" 'dur:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots + b_1q^{n-1} = b_1.(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = b_1.\frac{1-q^n}{1-q}$$

Geometrik diziyi nitelendiren özellik. $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dizisinin bir geometrik dizi olması için gerek ve yeter koşul, her $k = 2, 3, \cdots, (n-1)$ için $b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}}$ veya $b_k^2 = b_{k-1}.b_{k+1}$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

(Bu eşitlik sağlanırsa, $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_k}{b_{k-1}} = \cdots = \frac{b_2}{b_1} = q$ ve buradan da $b_{k+1} = b_k.q$ bulunur. Koşulun gerekliliğini de siz kontrol ediniz.)

Sonuç. Her $1 \le i < k$ için $b_k = \sqrt{b_{k-i}.b_{k+i}}$ 'dir. Yani, geometrik dizinin k. terimi, kendisinden "sağda" ve "solda" aynı "uzaklıkta" bulunan komşularının geometrik ortalamasına eşittir.

Bu sonucu kullanarak aşağıdaki problemi çözmek zor değil:

Problem 3. Geometrik dizinin 63. terimi 2 ise, ilk 125 terimin çarpımı nedir? (Yanıt: 2^{125})

Sonsuz azalan geometrik dizi ve onun toplamı formülü:

Sonsuz geometrik dizide dizi çarpanı q için $|q| < 1$ eşitsizliği sağlanırsa, buna sonsuz azalan geometrik dizi denir. Yukarıda gördüğümüz $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ formülünde $|q| < 1$ olduğunu gözönüne alarak $n \to \infty$ için limite geçerseniz, q 'ların kuvvetlerinden ibaret sonsuz toplam için çok pratik (ve üniversite eğitiminizde de sık sık karşılaşacağınız) aşağıdaki formülü elde edersiniz:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\ , \quad (|q| < 1)\ .$$

(Limit bilmeyenler, $(1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots)$ ifadesinde parantezleri formal olarak açsınlar ve "artıların" "eksileri" nasıl götürdüğünü zevkle izlesinler.)

Böylece, ilk terimi b_1 ve dizi çarpanı q olan sonsuz azalan geometrik dizinin toplamı

$$b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots + b_1q^n + \cdots = b_1.\frac{1}{1-q}$$

olur.

Örnek: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

ARİTMETİK DİZİ KONUSUNDA BİR KAÇ PROBLEM

Problem 4*. Terimleri farklı doğal sayılardan ibaret olan 1001 terimli öyle bir aritmetik dizi oluşturunuz ki, terimlerin çarpımı bir tamkare olsun.

Çözüm. $1, 2, 3, \cdots, 1000, 1001$ dizisini alalım ve yazılımın kolaylığı için $1001! = k$ diyelim. Şimdi, $1.2.3 \cdots 1000.1001 = 1001! = k$ eşitliğinin her iki yanını k^{1001} ile çarpalım:

$$(1.k).(2.k).(3.k)\cdots(1001.k) = k.k^{1001} = k^{1002} = (k^{501})^2 \ .$$

Göründüğü gibi, $1.k, 2.k, 3.k, \cdots, 1001.k$ dizisi, 1001 terimli bir aritmetik dizidir ve terimlerin çarpımı bir tamkaredir.

Problem 5*. Doğal sayılardan oluşturulmuş aritmetik dizinin terimleri içinde ya hiç tamkare yoktur, ya da sonsuz çoklukta tamkare bulunur; kanıtlayınız.

Çözüm. Tüm terimleri doğal sayılar ve dizi farkı d olan $(a_n), n = 1, 2, \cdots$ aritmetik dizisinin bir teriminin tamkare olduğunu varsayalım: $a_k = s^2$. Bu takdirde her $t \in \mathbf{N}$ için $n = k + 2st + t^2 d$ olmak üzere, dizinin n numaralı terimi a_n 'ye bakalım:

$$a_n = a_k + (2st + t^2 d)d = s^2 + 2std + (td)^2 = (s + td)^2 \Rightarrow a_n = (s + td)^2 \ .$$

Yani, her $t \in \mathbf{N}$ için $n = k + 2st + t^2 d$ numaralı terim bir tamkaredir.

Problem 6. Aritmetik dizinin ilk k teriminin toplamı S_k olmak üzere

$$\frac{S_n}{n}(m-p) + \frac{S_m}{m}(p-n) + \frac{S_p}{p}(n-m) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her $t \in \mathbf{N}$ için $S_k = \frac{a_1+a_k}{2}.k = \frac{2a_1+(k-1)d}{2}.k$ olduğunu gözönüne alırsak eşitliğin sol tarafı

$$\frac{1}{2}\{[2a_1 + (n-1)d](m-p) + [2a_1 + (m-1)d](p-n) + [2a_1 + (p-1)d](n-m)\} =$$

$$= \frac{d}{2}[(n-1)(m-p) + (m-1)(p-n) + (p-1)(n-m)] = 0$$

olur.

Problem 7. $a_1, a_2, \cdots, a_n$, dizi farkı d olan bir aritmetik dizi ise,

$$A = \frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \frac{1}{a_3a_4a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$$

toplamı neye eşittir?

Çözüm. $a_k - a_{k-2} = 2d \ , \ (k = 3, 4, \cdots)$ olduğundan

$$\frac{1}{a_{k-2}a_{k-1}a_k} = \frac{1}{2d}[\frac{1}{a_{k-2}a_{k-1}} - \frac{1}{a_{k-1}a_k}]$$

eşitliği her $k \geq 3$ için sağlanır. Bunları taraf-tarafa toplarsak,

$$A = \frac{1}{2d}.[\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3} - \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-1}a_n}] = \frac{1}{2d}.[\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_{n-1}a_n}]$$

elde ederiz. Örnek olarak,

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{97.98.99} = \frac{1}{2}.[\frac{1}{2} - \frac{1}{98.99}] \ .$$

GEOMETRİK DİZİ KONUSUNDA BİR KAÇ PROBLEM

Problem 8. (a) Bir geometrik dizide 27, m 'inci yerde; 8, n 'inci yerde ve 12 de p 'inci yerde ise, m, n ve p sayıları arasındaki bağıntıyı bulunuz.

(b) 7, 8 ve 9 aynı geometrik dizinin terimleri olabilir mi?

Çözüm. (a) Verilenlere göre, $27 = b_1.q^{m-1}$, $8 = b_1.q^{n-1}$ ve $12 = b_1.q^{p-1}$ 'dir. Buradan,

$$\frac{27}{8} = q^{m-n} \text{ ve } \frac{9}{4} = q^{m-p} \Rightarrow (\frac{27}{8})^{m-p} = (\frac{9}{4})^{m-n} \Rightarrow$$

$$(\frac{3}{2})^{3(m-p)} = (\frac{3}{2})^{2(m-n)} \Rightarrow 3(m-p) = 2(m-n) \Rightarrow m + 2n = 3p\,.$$

(b) (a) şıkkına benzer şekilde yaparsak,

$$(\frac{8}{7})^{p-n} = (\frac{9}{7})^{m-n} \Rightarrow 8^{p-n} = 9^{m-n}.7^{p-m}$$

elde ederiz ki, bu eşitlik hiç bir n, m, p doğal sayıları için sağlanmaz.

Problem 9. $A = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{33\cdots3}_{100\ tane}$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} A &= 3.[1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\cdots1}_{100\ tane}] \\ &= 3.[\frac{10-1}{9} + \frac{100-1}{9} + \frac{1000-1}{9} + \cdots + \frac{10^{100}-1}{9}] \\ &= \frac{1}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{100}) - 100] = \frac{1}{3}[10.\frac{1-10^{100}}{1-10} - 100] \\ &= \frac{10}{27}(10^{100} - 91). \end{aligned}$$

Problem 10*. $S(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} S(x) &= (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) + (x^2 + x^3 + \cdots + x^n) + (x^3 + x^4 + \ldots + x^n) \\ &+ \ldots + (x^{n-1} + x^n) + x^n \\ &= \frac{x - x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^2 - x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^3 - x^{n+1}}{1-x} + \cdots + \frac{x^n - x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x}(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n.x^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1-x}(\frac{x - x^{n+1}}{1-x} - n.x^{n+1}) = \frac{1}{(1-x)^2}[x - (n+1)x^{n+1} - n.x^{n+2}]. \end{aligned}$$

(Limit bilenler, $|x| < 1$ için $n \to \infty$ olmak üzere limite geçerlerse,

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

elde ederler.)

ARİTMETİK VE GEOMETRİK DİZİLERE AİT KARIŞIK PROBLEMLER

Problem 11. Şu özelliklere sahip 4 sayıyı bulunuz: Sayıların ilk üçü geometrik dizi, son üçü aritmetik dizi oluşturmaktadır. Ayrıca, baştaki ve sondaki iki sayının toplamı 21, ortadaki sayıların toplamı ise 18 'dir.

Çözüm. Sayılara a, b, c, d dersek, verilenlerden

$$b^2 = ac, \ 2c = b + d, \ a + d = 21, \ b + c = 18$$

denklemler sistemini elde ederiz. Buradan 2 tane çözüm takımı bulunur: $\{3, 6, 12, 18\}$ ve $\{\frac{75}{4}, \frac{45}{4}, \frac{27}{4}, \frac{9}{4}\}$.

Problem 12. Bir düzgün 1001-genin her köşesine bir pozitif sayı yazılmıştır. Şöyle ki, her bir sayı hemen "sağında" ve "solunda" yazılmış komşularının ya aritmetik ya da geometrik ortalamasına eşittir. Köşelerde yazılmış tüm sayıların birbirine eşit olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Sayılar içinde birbirine eşit olmayanların varlığını farzedelim ve tüm sayıların en küçüğüne m diyelim. Bu takdirde m yazılmış öyle bir köşe bulunacaktır ki, onun en az bir komşusu m 'den büyük olacaktır. m yazılmış köşenin sağında ve solunda yazılmış sayılara a ve b diyelim. Varsayıma göre, a ve b 'den en az biri (diyelim ki, a) m 'den büyüktür: $a > m$, $b \geq m$. Böyle olunca, $\frac{a+b}{2} > m$ ve $\sqrt{ab} > m$ eşitsizlikleri sağlanacaktır ki, bu da problemin koşuluyla bir çelişkidir (m sayısı ya $\frac{a+b}{2}$ 'ye, ya da $\sqrt{ab}$ 'ye eşit olmalı idi).

Problem 13*. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ doğal sayılardan ibaret ve dizi farkı sıfır olmayan bir aritmetik dizi ise, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ toplamı bir tamsayı olabilir mi?

Bu sorunun cevabı "hayır" 'dır; fakat bunu kanıtlamak kolay değildir. (En azından ben bunun ispatını bilmiyorum.) Biz burada bir özel durumu incelemekle yetinelim: k ve n doğal sayılar olmak üzere,

$$I = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+n}$$

toplamının hiç bir zaman bir tamsayı olamayacağını gösterelim. İspat basit bir gerçekliğe dayanıyor: $k, k+1, \cdots, k+n$ ardışık sayılar dizisinde 2 'nin en büyük kuvvetine bölünen sayı bir tanedir. (Aksini varsayarak, böyle sayıların en az iki tane olduğunu düşünelim: $p.2^r$ ve $q.2^r$. Burada p ve q tek sayılar ve $p < q$ 'dur. Bu iki sayı ardışık sayı dizisinin terimleri olduğundan $p.2^r$ nin yanısıra $(p+1)2^r$ sayısı da bu dizide bulunmalıdır. Fakat $p+1$ bir çift sayı olduğundan $(p+1)2^r$ sayısı 2^{r+1} 'e bölünecektir ve bu da 2^r 'nin seçimi ile çelişiyor.)

Şimdi, $k, k+1, \cdots, k+n$ dizisinde 2 'nin en büyük kuvvetine bölünen sayı bir tane olduğundan, I toplamını ortak paydaya getirerek kesir biçiminde yazdığımızda, kesirin paydası bir çift sayı, payı ise bir tek sayı olacaktır ve dolayısıyla, I bir tamsayı olamaz. (Ayrıntıları [1] kaynağından (problem No 5.10) bulabilirsiniz.)

Bu konuda başka bir ilginç problem şöyledir:

Problem 14*. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ doğal sayıların herhangi aritmetik dizisi olsun. Bu diziden

$$\frac{1}{a_{k1}} + \frac{1}{a_{k2}} + \cdots + \frac{1}{a_{kr}} = 1$$

sağlanacak biçimde $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kr}$ terimleri seçmek her zaman mümkün müdür?

Bu çok zor sorunun yanıtı büyük ihtimalle, "evet" 'tir, fakat ispatını bilmiyorum. Bir örnek vermekle yetinelim: $a_1, a_2, \cdots, a_n, \ldots$ dizisi çift sayılar dizisi olsun. 1 'in çift sayılar üzerinden bir sürü "ayrışımı" yazılabilir:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} \quad \text{ve diğerleri.}$$

(1 'in tek sayılar üzerinden bir "ayrışımını" bulabilir misiniz?)

ARİTMETİK DİZİLER VE SAYILAR TEORİSİ

Aritmetik diziler konusunda en zor problemler, doğal olarak, sayılar teorisinde asal sayılarla ilgili olarak ortaya çıkmaktadır. Bunun klasik örneği meşhur Dirichlet Teoremidir. (1788 yılında Fransız matematikçi Legendre tarafından formüle edilmiş ve yalnız 50 yıl sonra-1837'de Alman matematikçi Dirichlet tarafından ispatlanmış teorem.)

Teorem (Dirichlet). a ve d aralarında asal olmak üzere, a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, ... aritmetik dizisinde sonsuz çoklukta asal sayı bulunur.

Gayet masum görünen bu teoremin ispatı çok zordur. Lakin söz konusu teoremin bazı özel durumları kolayca ispatlanabilir. Bunu bir problem şeklinde verelim:

Problem 15. **(a)** $3n+2$; **(b)** $4n+3$; **(c)** $6n+5, (n=1,2,3,\ldots)$ biçiminde sonsuz çoklukta asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. İspatlar birbirine benzediğinden, sadece, $6n+5$ biçiminde gösterilebilen asal sayıların sonsuz çoklukta olduğunu kanıtlayalım. (Göreceğiniz gibi, ispat, asal sayıların sonsuzluğu hakkında Öklid'in meşhur ispatına çok benziyor.)

$6n+5, (n \in \mathbf{N})$ şeklindeki asalların sonlu tane olduğunu varsayalım: $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Şöyle bir sayı oluşturalım:

$$n_0 = 6p_1p_2\cdots p_n - 1 = 6(p_1p_2\cdots p_n - 1) + 5 \quad .$$

$k_0 = p_1p_2\cdots p_n - 1$ dersek, n_0 sayısının $6k_0+5$ biçiminde olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi, eğer n_0 asal ise, o halde $6k+5$ şeklindeki asalların, sadece, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sayıları olduğu varsayımı doğru olmuyor (çünkü n_0 da bu biçimdedir ve $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 'den farklıdır). Tersine, eğer $n_0 = 6k_0+5$ sayısı bir asal sayı değilse, o halde onun muhakkak $6k+5$ biçiminde bir asal çarpanı olacaktır (çünkü n_0'ın bütün asal çarpanları $6k+1$ biçiminde olsa idi, bu sayının kendisi de $6k+1$ biçiminde olmalı idi). İşte, n_0 'ın sözkonusu asal çarpanı $6k+5$ biçiminde olmasına rağmen, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sayılarından hiç birisi ile çakışmıyor ve bu halde de bir çelişki elde etmiş oluruz.

Asal sayıların doğal sayılar kümesinde dağılımı hakkında olumlu bilgi veren Dirichlet Teoreminin yanısıra, aşağıdaki problemde ifade edilen "olumsuz" gerçeklik çok ilginçtir ve bu problemi ilk defa gören okuyucumuzun şaşıracağına inanıyorum. (Şaşırtıcı olan, problemin zor gözükmesine karşın onun çözümünün basitliğidir!)

Problem 16. İstenilen kadar büyük doğal sayı n verilsin (örneğin, n-milyar veya trilyon olsun). İçlerinde bir tane de asal bulunmayan n tane ardışık doğal sayının varlığını gösteriniz.

Çözüm. Hepsi bileşik sayı olan n tane ardışık sayı dizisine bir örnek şöyledir:

$$(n+1)!+2, (n+1)!+3, (n+1)!+4, \cdots, (n+1)!+(n+1) \quad .$$

(Birinci sayı 2'ye , ikinci sayı 3'e , üçüncü sayı 4'e ve diğerlerine bölünür).

Sayılar Teorisinde çok ilginç (ve ilginç olduğu kadar da çok zor) konulardan birisi de 'tüm terimleri asal olan aritmetik diziler' konusudur. Böyle dizilere bundan sonra, kısaca, *AAD* diyeceğiz. *AAD* 'ler hakkında neler söylenebilir? Bir kere, söz konusu aritmetik dizilerin dizi farkının bir çift sayı olacağı açıktır. Dizi farkı 2 olan *AAD* bir tanedir: $3, 5, 7$. (Bir tane olma sebebi gayet açık: 3 ardışık tek sayıdan biri 3'e bölünür). İlk terimi 3 olan bir sürü 3-terimli *AAD* göstermek mümkündür. Örneğin, $\{3,7,11\}, \{3,11,19\}, \{3,13,23\}, \{3,17,31\}, \{3,24,43\}, \{3,31,59\}, \{3,37,71\}, \{3,41,79\}, \{3,43,83\}$ ve diğerleri.

Dizi farkı 6 olan 3-terimli *AAD* 'lerin sonsuz çoklukta olduğu düşünülmektedir [4]. Örnekler: $\{5,11,17\}$, $\{151,157,163\}$ ve diğerleri. Fakat, dizi farkı 6 olan 5-terimli *AAD* bir tanedir: { 5, 11, 17, 23, 29 }. (Bir tane tek olmasının sebebi: Terimlerin biri 5 'e bölünmek zorundadır.)

Terimler sayısı istenilen kadar çok olan AAD 'ler var mıdır? Bu sorunun cevabı bilinmiyor, ve bilinme olasılığı da pek fazla değil. Ancak, örneğin, 12 terimli bir AAD örneği bilinmektedir [4] : İlk terimi 23143 ve dizi farkı 30030 olan aritmetik dizi.

AAD 'lere ait ortaya atılan ilginç bir hipotez şöyledir:

Hipotez. $n > 1$ herhangi bir doğal sayı olsun. Eğer d doğal sayısı n 'yi aşmayan her asal sayıya bölünürse, bu takdirde dizi farkı d ve terimler sayısı n olan sonsuz çoklukta AAD 'ler vardır.

Bir daha vurgulayalım ki, bu sadece bir hipotezdir.

Yazımızın sonunda, aritmetik ve geometrik diziler konusunda bilgilerinizi daha da geliştirmek için sizin çözmenizi istediğimiz bir kaç problem öneriyoruz:

Problemler

1- $a_1, a_2, ..., a_n$ bir aritmetik dizi ve $\sin a_1, \sin a_2, \ldots, \sin a_n$ de başka bir aritmetik dizidir. $\sin a_1 = \frac{1}{2}$ ve $\sin a_n = -\frac{1}{2}$ olduğuna göre $\sin a_2$ neye eşittir?

2- Eşitliği ispatlayın:

$$\underbrace{44...4}_{2n \text{ tane}} - \underbrace{88...8}_{n \text{ tane}} = (\underbrace{66..6}_{n \text{ tane}})^2$$

3- Bir aritmetik dizide $S_n = n^2.p$ ve $S_k = k^2.p$ ise, $S_p = p^3$ olduğunu kanıtlayın. (Burada S_k ile ilk k terimin toplamı gösterilir.)

4- a^2, b^2 ve c^2 'nin aritmetik dizi oluşturması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ ve $\frac{1}{a+b}$ sayılarının bir aritmetik dizi oluşturmasıdır; kanıtlayınız.

5- Tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan istenilen uzunlukta aritmetik diziler bulunduğunu kanıtlayınız.

6- Terimleri doğal sayılar olan öyle bir aritmetik dizi bulunuz ki, dizinin hiç bir terimi iki asal sayının ne toplamı, ne de farkı biçiminde yazılamasın.

(1. problemin çözümünü [2] 'de, 5. ve 6. problemlerin çözümlerini ise [1] kaynağında bulabilirsiniz. 2., 3. ve 4. problemler [3] 'ten alınmıştır.)

KAYNAKLAR

[1] Halil İ. Karakaş ve İlham Aliyev; Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri; Ankara, TÜBİTAK, 1996.

[2] Halil İ. Karakaş ve İlham Aliyev; Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri; Ankara, TÜBİTAK, 1998.

[3] A. G. Mordkoviç; Diziler konusunda iki düzine problem; KVANT, No 2, (1971), s. 37-43.

[4] W. Sierpinski; Asal sayılar hakkında neleri biliyor ve neleri de bilmiyoruz, Moskova, 1963.