PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.186. Bir konveks dörtgenin köşegenleri, bu dörtgeni, alanları tamsayılar olan dört üçgene bölmüştür. Söz konusu dört sayının çarpımının bir tamkare olduğunu gösteriniz.

A.187. $x^{24} - x^{19} + x^{14} - x^3 + 1 > 0$ eşitsizliğinin her $x \in \mathbf{R}$ için sağlandığını gösteriniz.

A.188. Bir sınıftaki öğrencilerden a_1 tanesi ders yılı içindeki sınavlardan en az bir tane 2 almıştır. Öğrencilerden a_2 tanesi en az iki tane 2, a_3 tanesi en az üç tane 2, ... , a_k tanesi en az k tane 2 almıştır ve k 'dan fazla sayıda 2 alan öğrenci yoktur. Sınıftaki öğrencilerin aldığı 2 'lerin sayısını bulunuz.

A.189. Fibonacci dizisi denilen dizi şöyle tanımlanıyor: $a_1 = a_2 = 1$ ve her $k \geq 1$ için $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$. Bu dizinin a_{1000} ve a_{770} terimlerinin en büyük ortak bölenini bulunuz.

A.190. O, A, B, C, D noktaları uzayda $(\mathbf{R}^3)$ farklı noktalar olmak üzere,

$$A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}A = \gamma$$

(γ dar açı) veriliyor. $A\hat{O}C + B\hat{O}D$ 'nin en küçük ve en büyük değerini bulunuz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.186. İkişer ikişer birbirine dik olan O_x, O_y, O_z ışınları bir E düzlemini A, B, C noktalarında kesiyorlar. Oluşan $OABC$ piramidinin tüm ayrıtlarının uzunlukları toplamı m ise, bu piramidin hacminin maksimum değeri nedir?

Y.187. Bir komisyon 40 kez toplandı. Komisyonun her toplantısında 10 üye hazır bulundu ve ayrıca, komisyon üyelerinden herhangi bir ikili düşünüldüğünde, bu ikili, toplantılarda en fazla 1 kez hazır bulundu. Komisyon üyelerinin sayısının 60 'tan fazla olduğunu gösteriniz.

Y.188. a ve b aralarında asal doğal sayılar olsun. Eğer $a+b$ ve a^2+b^2 sayılarının 1 'den büyük ortak böleni varsa, bunun 2 olduğunu gösteriniz.

Y.189. a, b ve c negatif olmayan herhangi sayılar olmak üzere

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$
$$+a^2bc + b^2ac + c^2ab \geq 0$$

eşitsizliğinin daima sağlandığını gösteriniz.

Y.190. $x_1, x_2, \cdots, x_m$ ve $y_1, y_2, \cdots, y_n$ doğal sayıları öyle seçilmişler ki, $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ ve $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ toplamları birbirine eşit olup $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_m = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ sayısı için $S < mn$ eşitsizliği sağlanmaktadır. İspat ediniz ki,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

eşitliğinde bir kaç sayıyı, eşitlik korunacak biçimde silmek mümkündür.

ÇÖZÜMLER

A.176. Aşağıdaki denklemin pozitif tamsayılar kümesinde çözümü olmadığını gösteriniz:

$$m^m + n^n = k^k \ .$$

Çözüm. m, n ve k doğal sayıları için $m^m + n^n = k^k$ eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu takdirde, $k^k > m^m$ ve $k^k > n^n$ olur. Buradan, $k > m$ ve $k > n$; dolayısıyla, $k \geq m+1$ ve $k \geq n+1$ elde edilir. Bu eşitsizliklerden,

$$k^k \geq (m+1)^{m+1} = (m+1)(m+1)^m$$
$$\geq 2(m+1)^m > 2m^m$$

ve benzer şekilde, $k^k > 2n^n$ eşitsizlikleri bulunur. Son iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$2k^k > 2m^m + 2n^n$$

ve buradan da

$$k^k > m^m + n^n$$

elde edilir. Çelişki.

A.177. Aşağıdaki sayılardan hangisinin daha büyük olduğunu bulunuz:

$$a = 1999^{2.1999} \text{ ve } b = 1998^{2000}.2000^{1998} \ .$$

Çözüm.

$$\frac{b}{a} = \frac{1998^{2000} \cdot 2000^{1998}}{1999^{2 \cdot 1999}}$$

$$= \frac{(1999-1)^{1998+2} \cdot (1999+1)^{1998}}{1999^{2\cdot 1998+2}}$$

$$= \frac{(1999^2-1)^{1998} \cdot (1999-1)^2}{(1999^2)^{1998} \cdot 1999^2}$$

$$= (1 - \frac{1}{1999^2})^{1998} \cdot (1 - \frac{1}{1999})^2 < 1$$

olduğundan, $b < a$ 'dır.

A.178. Bir sınıfta kız öğrenciler tüm öğrencilerin 0.44 'ünden az ve 0.43 'ünden fazla ise, sınıfta en az kaç öğrenci olabilir?

Çözüm. (Yanıt: 16) Tüm öğrencilerin sayısı n ve kız öğrencilerin sayısı m olmak üzere

$$\tfrac{43}{100} < \tfrac{m}{n} < \tfrac{44}{100} = \tfrac{11}{25} \qquad (1)$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük n 'yi bulmalıyız. Bu iş deneme-yanılma" yöntemiyle yapılabilir, fakat bu çok sıkıcı olur. Daha kısa bir yol gösterelim. (1) 'den aşağıdaki eşitsizlikler zincirini yazabiliriz:

$$2\frac{14}{43} > \frac{n}{m} > 2\frac{3}{11} \Rightarrow \frac{14}{43} > \frac{n-2m}{m} > \frac{3}{11} \Rightarrow$$

$$3\frac{1}{14} < \frac{m}{n-2m} < 3\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{14} < \frac{7m-3n}{n-2m} < \frac{2}{3}$$

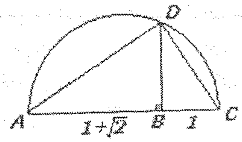
$$\Rightarrow 14 > \frac{n-2m}{7m-3n} > 1\frac{1}{2}$$

$(1\frac{1}{2}, 14)$ aralığında en küçük tamsayı 2 olduğundan, m ve n 'nin var olup olmadığını kontrol ediyoruz. $n = 16$ ve $m = 7$ sayılarının bu eşitliği sağladığı kolayca görülebilir.

A.179. Düzlem üzerinde uzunluğu 1 olan parça verilmiştir. Yalnız pergel ve cetvel kullanarak, uzunluğu $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ olan bir parça çiziniz.

Çözüm. **(1)** Pergel ve cetvel kullanarak, dik kenarları 1 olan bir dik üçgen kuruyoruz. Bu üçgenin hipotenüsünün uzunluğu $\sqrt{2}$ olacaktır.

(2) Şimdi bir doğru üzerinde uzunluğu $1+\sqrt{2}$ olan AB parçasını işaretliyoruz ve sonra da uzunluğu 1 olan BC parçasını işaretliyoruz. (Şekile bakınız.)



(3) Bu aşamada, çapı AC olan çemberi çiziyoruz.

(4) B noktasından, AC 'ye dik olan BD doğrusunu çiziyoruz.

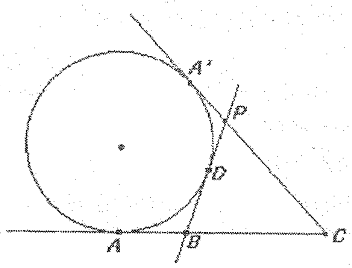
(5) Şimdi, $|BD| = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ olduğunu gösterelim. $\overset{\triangle}{ADB}$ ve $\overset{\triangle}{BDC}$ dik üçgenleri benzer üçgenler olduğundan

$$|BD|^2 = |AB| \cdot |BC| = 1+\sqrt{2}$$

olur ve buradan da istenen sonuç çıkar.

A.180. Düzlemde bir d doğrusu ve bu doğru üzerinde sırasıyla A, B, C noktaları verildiğinde, d doğrusuna daima A noktasında teğet olan ve yarıçapı değişen çembere B ve C noktalarından çizilen teğetlerin kesişim noktası P ile gösterilmek üzere, P 'nin geometrik yeri nedir?

Çözüm.



$$PC = CA' - PA' = CA - PA' = CA - PD$$

$$PB = PD + DB = PD + AB \Rightarrow$$

$$PB + PC = AC + AB = sabit\ .$$

Böylece, söz konusu P noktalarının geometrik yeri, odakları; B, C olan bir elipstir.

Y.176. $80 < 81$, $96 < 100$ ve $1000 < 1024$ eşitsizliklerini kullanarak $\log_{10} 2$ sayısının virgülden sonra ilk iki basamağını bulunuz.

Çözüm. Verilen eşitsizlikleri şöyle yazalım:

$$2^3 \cdot 10 < 3^4 \ , \ 3 \cdot 2^5 < 10^2 \ , \ 10^3 < 2^{10} \ .$$

İlk iki eşitsizlikten

$$2^3 \cdot 10 < 3^4 < \frac{10^8}{2^{20}}$$

ve dolayısıyla, $2^{23} < 10^7$ olur. Her iki yanın 10 tabanına göre logaritmasını alırsak,

$$23 \log 2 < 7 \Rightarrow \log 2 < \frac{7}{23} = 0,304... < 0,305 \ .$$

Öte yandan, $10^3 < 2^{10}$ eşitsizliğinde her iki tarafın da logaritmasını alırsak,

$$3 < 10 \log 2 \Rightarrow \log 2 > \frac{3}{10} = 0,30$$

olur. Böylece, $0,30 < \log 2 < 0,305$ eşitsizliği elde ediliyor ki, bu da $\log 2$ 'nin virgülden sonra ilk iki basamağının 30 olduğunu göstermektedir. *(Çözen: Mehmet Erhan Ünal- Isparta)*

Y.177. İki kişi ölçüleri 8×8 olan tahta levhanın hanelerini sıra ile boyuyorlar. Birinci oyuncu her hamlesinde 2 komşu haneyi siyaha boyuyor. İkinci oyuncu ise her hamlesinde keyfi bir haneyi beyaza boyuyor. Başlangıçta tüm haneler beyaz renktedirler. İkinci oyuncu öyle bir strateji uygulayabilir mi ki, onun her hamlesinden sonra levha üzerindeki herhangi 5×5 karesinin en az bir köşe hanesi beyaza boyanmış olsun? (Komşu haneler, ortak kenarı olan hanelerdir. Aynı bir hane oyun sürecinde bir kaç defa boyanabilir.)

Çözüm. Herhangi 5×5 karesini alırsak, şekilde işaretlenmiş hanelerden tam 1 tanesi onun köşesinde bulunacak. İkinci oyuncu her hamlesinden sonra şekilde işaretlenmiş hanelerin beyaz olmasını sağlayabilir. Çünkü birinci oyuncu bir hamlesinde en fazla 1 tane işaretlenmiş haneyi siyaha boyayabilir.

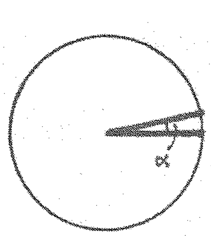
o			o			o	
		o			o		
	o			o			o
o			o			o	
		o			o		
	o			o			o
o			o			o	
		o			o		

(Bu hanelerin birbirine komşu olmadıklarına dikkat ediniz. Başlangıçta tüm hanelerin beyaz olduğunu da unutmayınız.)

Y.178. Alanı 1 'e eşit olan dairenin içinde 1999 tane nokta, herhangi 3 nokta bir doğru üzerinde bulunmayacak biçimde işaretlenmiştir. İşaretlenmiş noktalar içinde öyle üçü vardır ki, köşeleri bu üç noktada bulunan üçgenin alanı

(a) 0,001999 'dan; **(b)** 0,0005 'den küçüktür; kanıtlayınız.

Çözüm. **(a)** Daireyi, açısı $\frac{1}{999} \cdot 360°$ olan 999 tane eşit dilime (sektör'e) bölelim. (Şekile bakınız.)



$\alpha = \frac{3660°}{999}$

En az 3 işaretlenmiş nokta içeren dilimin varlığı açıktır. Köşeleri bu 3 noktada olan üçgenin alanı 0,001999 'dan küçüktür. Çünkü bu üçgenin alanı dilimin alanından küçüktür ve sonuncu alan ise $\frac{1}{999}$ olup 0,001999 'dan küçüktür.

(b) Herhangi 3 tanesi bir doğru üzerinde bulunmayan 1999 tane nokta kullanılarak, birbiriyle kesişmeyen 1997 tane üçgen kurulabilir. Onlara $\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_{1997}$ ve alanlarına da $A_1, A_2, \cdots, A_{1997}$ diyelim. O halde

$$(\min_{1 \le k \le 1997} A_k) \cdot 1997 \le A_1 + A_2 + \cdots + A_{1997} \le 1$$

ve buradan da

$$\min_{1 \le k \le 1997} A_k \le \frac{1}{1997} < 0,0005$$

olur.

Y.179. x ve y reel sayılar olmak üzere, eğer

$$A = \{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y) : n \in \mathbf{N}\}$$

kümesi sonlu küme ise, bu takdirde x ve y sayılarının ikisi de rasyonel sayıdır; kanıtlayınız.

Çözüm. $a_n = \cos(n\pi x)$ ve $b_n = \cos(n\pi y)$ diyelim. Her n doğal sayısı için

$$(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2(a_n^2 + b_n^2) =$$

$$2(\cos^2(n\pi x) + \cos^2(n\pi y)) =$$
$$2(\frac{\cos(2n\pi x) + 1}{2} + \frac{\cos(2n\pi y) + 1}{2}) =$$
$$2 + (a_{2n} + b_{2n})$$

ve dolayısıyla,

$$(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2 + (a_{2n} + b_{2n})$$

eşitliği sağlanır. Buradan, $A = \{a_n + b_n\}$ kümesi sonlu olduğundan, $B = \{a_n - b_n\}$ kümesinin de sonlu küme olması çıkar. Öyleyse,

$$a_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) + (a_n - b_n)]$$

eşitsizliğinden, $\{a_n\}$ kümesinin de bir sonlu küme olacağını söyleyebiliriz. Benzer şekilde, $\{b_n\}$ kümesi sonludur. Şimdi, $\{a_n\}$ sonlu küme olduğundan $a_m = a_n$ sağlanacak biçimde m ve n doğal sayıları vardır.

$$a_m = a_n \Rightarrow \cos(m\pi x) = \cos(n\pi x) \Rightarrow$$

$$m\pi x - n\pi x = k\pi, (k \in \mathrm{N})$$

Buradan da, $x = \frac{k}{m-n}$ bir rasyonel sayıdır. Benzer şekilde y 'nin rasyonelliği gösterilebilir.

Y.180. $A_1A_2A_3$ ikizkenar olmayan bir üçgen, a_i, A_i 'nin karşısındaki kenar; M_i, a_i 'nin orta noktası; T_i, iç çemberin a_i kenarına değdiği nokta; S_i, T_i 'nin $\hat{A_i}$ 'nin iç açıortayına göre simetriği olan nokta olmak üzere M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 doğrularının aynı bir noktadan geçtiğini ispatlayınız.

Çözüm. $M_1M_2M_3$ üçgeni ile $S_1S_2S_3$ üçgeninin homotetik olduğu gösterilirse, bunun sonucu olarak problemin iddiası elde edilir.

$M_1M_2M_3$ ile $A_1A_2A_3$ üçgenleri homotetiktir. O halde, $S_1S_2S_3$ ile $A_1A_2A_3$ üçgenlerinin homotetik olduğu gösterilmelidir. A_1, A_2, A_3 açılarının açıortayları karşı kenarları B_1, B_2, B_3 noktalarında kessin. I iç merkez olmak üzere,

$$T_1\hat{I}T_3 = 180° - \hat{A_2} \;\; ;$$

$$T_3\hat{B_3}A_3 = \hat{A_2} + \frac{\hat{A_3}}{2} \;\; ;$$

$$T_3\hat{I}B_3 = 90° - (\hat{A_2} + \frac{\hat{A_3}}{2}) \;\; ;$$

$$T_3\hat{I}S_3 = 2\, T_3\hat{I}B_3 = 180° - 2\,\hat{A_2} - \hat{A_3} \quad \text{'den}$$

$$S_3\hat{I}T_1 = T_3\hat{I}T_1 - T_3\hat{I}S_3 = \hat{A_2} + \hat{A_3}$$

ve benzer biçimde

$$S_2\hat{I}T_1 = \hat{A_3} + \hat{A_2}$$

ve dolayısıyla, $S_2S_3//A_2A_3$ ve aynı düşünüşle, $S_3S_1//A_3A_1$ ve $S_1S_2//A_1A_2$ elde edilir. $S_1S_2S_3$ üçgeni ile $M_1M_2M_3$ üçgeninin karşılıklı kenarları paralel olan iki üçgen olduğu anlaşılır. S_1, S_2, S_3; $A_1A_2A_3$ 'ün çevrel çemberi üzerinde ve M_1, M_2, M_3; $A_1A_2A_3$ 'ün Euler çemberi üzerinde olduğundan bu iki üçgen eş değildir. O halde $S_1S_2S_3$ ile $M_1M_2M_3$ homotetiktir ve M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 aynı bir noktadan geçer.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,

07058-Antalya

adresine gönderilecektir.
