DÖRDÜNCÜ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI İKİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev-Fikri Gökdal
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Dördüncü Antalya Matematik Olimpiyadının ikinci seçme sınavı 15 Mayıs 1999 Cuma günü saat 10:00 'da Akdeniz Üniversitesi merkezi dersliklerinde yapıldı.

Bilindiği gibi, Antalya Matematik Olimpiyadının Birinci Seçme Sınavı 10 Nisan 1999 Cumartesi günü yapılmış ve olimpiyada ülkemizin çeşitli yörelerinden sekizyüzün üzerinde lise öğrencisi katılmıştı. Lise I-II ve Lise III gruplarına 20'şer soruluk testler olarak uygulanan birinci seçme sınavı (bu sınavın sorularının yanıtları bundan önceki sayımız olan Cilt 8, Sayı 2 'de verilmişti) değerlendirildi ve Lise I-II grubundan 38 öğrenci, Lise III grubundan 15 öğrenci ikinci seçme sınavına çağrıldı.

İkinci sınavda, her iki gruba 5 'er sorudan oluşan klasik tip sınavlar verildi ve sınav süresi olarak 3.5 saat süre tanındı.

Dördüncü Antalya Matematik Olimpiyadı İkinci Seçme Sınavının sorularını ve çözümlerini aşağıda sunuyoruz.

Bazı sorular için jürinin önerdiği çözümlerle birlikte yarışmacıların değişik çözümlerini de sunuyoruz. Her zaman olduğu gibi, sevgili okurlarımızın burada sunulan çözümlere bakmadan önce kendi çözümlerini üretmeğe çalışmalarını salık veriyoruz.

Lise I-II Grubu Soru ve Çözümleri:

Soru 1. Ondalık gösterimindeki bütün rakamları aynı olan ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $1+1999k$ biçiminde yazılabilen sonsuz çoklukta doğal sayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.1. Her $p > 5$ asal sayısı için bütün rakamları 1 olan ve $1+1999.(tp)$, $t \in \mathbb{N}$, biçiminde yazılabilen bir sayı bulunduğunu göstermek yeter. Bunun için,

$$a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, ..., a_k = \underbrace{11...1}_{k\ tane}, ...$$

dizisini düşünelim. Eğer bu dizinin terimlerinden biri $1999.p$ ile bölünüyorsa bu terimin 10 katının 1 fazlası istenilen türde bir sayıdır. Aksi halde, bu dizinin $1999.p$ 'ye eşit kalanla bölünen en az iki terimi vardır (Neden?). Böyle iki terimin farkı

$$(11...1).10^a = A.10^a$$

biçiminde bir sayı olacak ve $1999.p$ 'ye bölünecektir. 10^a ve $1999.p$ aralarında asal olduğundan, bu farkın diğer çarpanı $A = 11...1$, $1999.p$ 'ye bölünmelidir: $A = (1999.p).s, s \in \mathbb{N}$. Şimdi, $1OA + 1 = 1 + 1999.(10ps)$ sayısı istenilen türde bir sayıdır. Sonsuz çoklukta asal sayı bulunduğundan, bu tür sayıların sonsuz çoklukta olacağı açıktır.

Çözüm 1.2. (Serhat Doğan, Sabri Yılmaz, Mustafa Bal, Ahmet Çetintaş)

Fermat Teoremine göre,

$$10^{1998} \equiv 1 \ (mod \ 1999)$$

ve dolayısıyla, her $k \in \mathbb{N}$ için $10^{1998k} \equiv 1 \ (mod \ 1999)$. Böylece, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$1999m = 10^{1998k} - 1 = \underbrace{99...9}_{1998k}$$

sağlanacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ ve dolayısıyla,

$$1999n = \underbrace{11...1}_{1998k}$$

sağlanacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Her tarafı 10 ile çarparak 1 eklersek ve $10n = t$ dersek,

$$\underbrace{11...1}_{1998k} = 1999t + 1$$

elde ederiz. k yerine herhangi doğal sayı konulabileceğinden, böyle sayılar sonsuz çokluktadır.

Çözüm 1.3. (Alp Şimşek)

$$10, 110, 1110, 11110, \ldots$$

dizisine bakalım. Bu dizinin en az bir terimi 1999 ile tam bölünür; çünkü, aksi halde, bu dizinin en az iki teriminin 1999 ile bölünmesinden elde edilen kalan aynı olur. Bu tür iki terim

$$A = \underbrace{\overline{11\ldots10}}_{n+1}, \text{ve } B = \underbrace{\overline{11\ldots10}}_{k+1}$$

ise $(k < n)$, o takdirde,

$$A - B = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n-k}\underbrace{00\ldots0}_{k+1}}$$

sayısı 1999 ile tam bölünür; 1999 asal olduğundan, $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{n-k+1}0$ sayısı 1999 ile tam bölünür. Çelişki. O halde, verilen dizinin 1999 ile tam bölünen $u+1$ basamaklı bir $s = 11\ldots10$ terimi bulunduğunu söyleyebiliriz. Bu takdirde, $s+1 = 1999k+1$, $k \in \mathbb{N}$ biçimindedir. Şimdi, her $t \geq 1$ için $ut+1$ basamaklı

$$s_t = \underbrace{11\ldots1}_{ut+1}$$

sayısını düşünürsek, $s_0 = s/10$ olmak üzere

$$s_t = 10^{u(t-1)+1}s_0 + 10^{u(t-2)+1}s_0 + \ldots + 10^1 s_0 + 1$$

sayısının da $1999k_t + 1$, $k_t \in \mathbb{N}$ biçiminde olduğu görülür.

Soru 2. $m^2 + (m+1)^2 = n^4 + (n+1)^4$ eşitliğini sağlayan m ve n pozitif tamsayılarının bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm 2.1. (Servet Öksüz, Hüseyin Kadıköy)

Denklem, $m(m+1) = (n^2+n)(n^2+n+2)$ biçiminde yazılır ve $n^2+n = t$ denirse,

$$m(m+1) = t(t+2) = (t+1)^2 - 1$$

biçimine getirilebilir. Eğer eşitliği sağlayan pozitif tamsayılar bulunsaydı, m ve t pozitif tamsayıları için

$$m^2 < (t+1)^2 = m^2 + m + 1 < (m+1)^2$$

olması gerekirdi. Bu mümkün değildir.

Çözüm 2.2. (Bümin Yenmez)

$f(x) = x^2 + (x+1)^2$, $(x \geq 1)$ diyelim. f 'nin artan fonksiyon olduğu açıktır.

$$f(n^2+n) = 2n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 2n + 1;$$

$$f(n^2+n+1) = 2n^4 + 4n^3 + 8n^2 + 6n + 5$$

'dir. Şimdi,

$$n^4 + (n+1)^4 = 2n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} f(n^2+n) &< n^4 + (n+1)^4 \\ &< f(n^2+n+1) \end{aligned}$$

olur.

n^2+n ve n^2+n+1 ardışık sayıları arasında hiç tamsayı bulunmadığından, artan f fonksiyonu için $f(m) = n^4 + (n+1)^4$ sağlanacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ yoktur.

Çözüm 2.3 (Ahmet Bombacı)

Parantezler açılıp, gereken kısaltmalar yapıldıktan sonra, denklem

$$m(m+1) = n(n+1)[n(n+1)+2]$$

şekline dönüşür. $k = n(n+1)$ denirse, denklemin ifadesi

$$m(m+1) = k(k+2), \quad (m, k \in \mathbb{N})$$

olur. Şimdi, eğer $m \leq k$ olursa, $m+1 \leq k+1 < k+2$ olur ve dolayısıyla, $m(m+1) < k(k+2)$ olur. Eğer $m > k$ olursa, $m+1 > k+1$ ve dolayısıyla, $m+1 \geq k+2$ olur. Bu durumda da $m(m+1) > k(k+2)$ olur. Yani, $m(m+1) = k(k+2)$ eşitliği pozitif tamsayılarda sağlanamaz.

Çözüm 2.4. (M. Bilge Badem)

Denklemi, $m^2+m = n^4+2n^3+3n^2+2n$ biçimine getirelim. Şimdi, sol taraftaki ifade için

$$n^4+2n^3+2n^2+n < n^4+2n^3+3n^2+2n$$
$$< n^4+2n^3+4n^2+3n+2$$

ya da

$$(n^2+n)(n^2+n+1) < n^4+2n^3+3n^2+2n$$
$$< (n^2+n+1)(n^2+n+2)$$

eşitsizliği sağlanacağından, $k = n^2+n$ olmak üzere,

$$k(k+1) < m(m+1) < (k+1)(k+2)$$

eşitsizliği de sağlanmalıdır. Buradan, $k < m < k+1$ olur. Fakat, iki ardışık tamsayı arasında başka bir tamsayı bulunmadığından, problemdeki eşitlik pozitif tamsayılarda sağlanamaz.

Soru 3. a, b, c ve d herhangi pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$\frac{1}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{64}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm 3.1. a, b, c ve d herhangi pozitif reel sayılar olsunlar. Bu takdirde,

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)$$
$$= 22+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2\left(\frac{2a}{c}+\frac{c}{2a}\right)$$
$$+4\left(\frac{4a}{d}+\frac{d}{4a}\right)+2\left(\frac{2b}{c}+\frac{c}{2b}\right)+4\left(\frac{4b}{d}+\frac{d}{4b}\right)$$
$$+8\left(\frac{2c}{d}+\frac{d}{2c}\right) \geq \cdots$$

$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2\right.$ eşitsizliği kullanılarak)

$$\geq 22+2+4+8+4+8+16 = 64\ .$$

Eşitlik durumu, örneğin, a herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere $b = a, c = 2a, d = 4a$ alındığında elde edilir.

Çözüm 3.2. Harmonik ve aritmetik ortalamalar karşılaştırılarak,

$$\frac{64}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}}$$
$$= 8\frac{8}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c/2}+\frac{1}{c/2}+\frac{1}{d/4}+\frac{1}{d/4}+\frac{1}{d/4}+\frac{1}{d/4}}$$
$$\leq 8\frac{a+b+2.\frac{c}{2}+4\frac{d}{4}}{8} = a+b+c+d\ .$$

Çözüm 3.3. (Bümin Yenmez)

Aritmetik ve geometrik ortalamalar eşitsizliğinden:

$$a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}\ ;$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq 4\sqrt[4]{\frac{64}{abcd}} = 16\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}\ .$$

Taraf tarafa çarparsak, istenen sonuç çıkar.

Çözüm 3.4. (Ali Cevahir, Sabri Yılmaz, Serhat Doğan)

Eşitsizliği

$$(a+b+c+d)\left(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{4}{c}+\tfrac{16}{d}\right) \geq 64$$

biçiminde yazarak, sol tarafa Cauchy-Schwarz-Bunyakovski eşitsizliğini uygulayalım:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)$$
$$\geq \left(\sqrt{a}\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\frac{2}{\sqrt{c}}+\sqrt{d}\frac{4}{\sqrt{d}}\right)^2$$
$$= (1+1+2+4)^2 = 8^2 = 64$$

Soru 4. Birinci terimi 2 olan ve ikinci teriminden itibaren her bir terimi bir önceki teriminin rakamlarının beşinci kuvvetlerinin toplamına eşit olan (yani, ikinci terimi $2^5 = 32$; üçüncü terimi $3^5 = 2^5 = 275$ olan) doğal sayı dizisisinde birbirine eşit en az iki terim bulunduğunu kanıtlayınız.

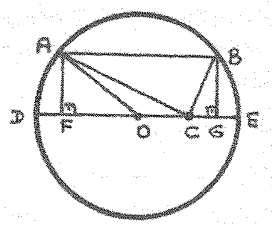
Çözüm 4. Dizinin dördüncü terimi

$$2^5 + 7^5 + 5^5 < 10^5 + 10^5 + 10^5 < 3.10^5$$

eşitsizliğini sağladığından, dördüncü terimin basamak sayısı 6 'dan fazla olamaz. Öyleyse, beşinci terim de 6.10^5 'ten küçüktür ve dolayısıyla basamak sayısı 6 'dan fazla olamaz. Böylece, dizinin tüm terimlerinin basamak sayısı 6 'dan fazla olamaz. Dirichlet İlkesinden, dizinin terimlerinden en az ikisi (aslında sonsuz çoklukta terim) birbirine eşittir.

Soru 5. Merkezi O ile gösterilen bir çember içinde bir C noktası alınıyor ve OC doğrusuna paralel olan herhangi bir $[AB]$ kirişi çiziliyor. $|AC|^2+|BC|^2$ toplamının, $[AB]$ kirişinin seçiminden bağımsız bir sabit olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 5.



Çemberin yarıçapı r, $|OC| = c$; O ve C noktalarını üzerinde bulunduran çap $[DE]$; A 'dan DE 'ye indirilen dikmenin ayağı F; B 'den DE 'ye indirilen dikmenin ayağı G; $|DF| = x$ ve $|AF| = y$ olsun. Bu durumda, simetriden, $|BG| = y$, $|GE| = x$ olur ve

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= (r - x + c)^2 + y^2, \\ |BC|^2 &= (r - x - c)^2 + y^2 \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} |AC|^2 + |BC|^2 &= 2(r - x)^2 + 2c^2 + 2y^2 \\ &= 2((r - x)^2 + y^2 + c^2) \\ &= 2(r^2 + c^2) \end{aligned}$$

elde edilir, ki bu sayı $[AB]$ kirişinin seçiminden bağımsızdır.

Lise III Grubu Soruları ve Çözümleri:

Soru 1. n 'nin tüm pozitif bölenlerinin toplamı $T(n)$ ile gösterilmek üzere, her $n > 1$ tek sayısı için $(T(n))^3 < n^4$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1. Önce, n ve m aralarında asal ise, $T(mn) = T(m)T(n)$ olduğuna dikkat edelim. Böylece, eğer n 'nin asal çarpanlarına ayrılışı ($n > 1$ olduğunu anımsayınız)

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

ise,

$$T(n) = T(p_1^{r_1})T(p_2^{r_2}) \cdots T(p_k^{r_k})$$

olacağından, söz konusu eşitsizliği p asal ve $p \geq 3$ olmak üzere $n = p^r$ biçiminde sayılar için göstermek yeter. Diğer yandan,

$$T(p^r) = 1 + p + \cdots + p^r < (1 + p)^r = (T(p))^r$$

Dolayısıyla, iddiayı $n = p$ asal ve $p \geq 3$ için kanıtlamak yeter. p asal ve $p \geq 3$ için

$$\begin{aligned} (T(p))^3 = (1 + p)^3 \leq (\frac{p}{3} + p)^3 &= \frac{64}{27} p^3 \\ &< 3p^3 \leq p^4. \end{aligned}$$

Soru 2. $x^7 + y^7 = x^4 + y^4$ denklemini sağlayan tüm (x, y) reel sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm 2. $x = 0$ ise,

$$y^7 = y^4 \Rightarrow y^4(y^3 - 1) = 0 \Rightarrow y \in \{0, 1\}.$$

$x \neq 0$ ise, $\frac{y}{x} = t$ diyerek,

$$x^7(1 + t^7) = x^4(1 + t^4)$$

elde ederiz. $y \neq -x$ olduğundan $t \neq -1$ ve böylece,

$$x^3 = \frac{1 + t^4}{1 + t^7}$$

ve buradan,

$$x = \sqrt[3]{\frac{1 + t^4}{1 + t^7}}, \quad y = tx = t.\sqrt[3]{\frac{1 + t^4}{1 + t^7}}$$

olur. O halde, denklemin çözüm kümesi

$$\{(0,0),(0,1)\}\cup\{(\sqrt[3]{\frac{1+t^4}{1+t^7}},t\sqrt[3]{\frac{1+t^4}{1+t^7}}) : t\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}\}$$

'dir.

Soru 3. Her $x>\sqrt{2}$, $y>\sqrt{2}$ için

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4>x^2+y^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

Çözüm 3.1. Sol taraf $\frac{x^5+y^5}{x+y}$ 'dir. $x>\sqrt{2}$, $y>\sqrt{2}$ olduğundan

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}>\frac{2x^3+2y^3}{x+y}$$

$$=2\frac{x^3+y^3}{x+y}=2(x^2-xy+y^2)\geq x^2+y^2.$$

Çözüm 3.2. (Bümin Yenmez)

$x^2+y^2=a$ olsun.

$$x^2+y^2\geq 2xy\Rightarrow xy\leq\frac{a}{2}\ .$$

Öyleyse,

$$x^4+y^4+2x^2y^2-x^3y-x^2y^2-xy^3$$

$$=a^2-xy(a+xy)\geq a^2-\frac{a}{2}(a+\frac{a}{2})$$

$$=\frac{a^2}{4}.$$

$x>\sqrt{2}$ ve $y>\sqrt{2}$ olduğundan, $\frac{a^2}{4}>a=x^2+y^2$ 'dir. Bunu yukarıda gözönüne alırsak, ispat biter.

Çözüm 3.3. (Murat Düğencioğlu)

$(x-y)^4\geq 0\Rightarrow$
$x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4\geq 0\Rightarrow$
$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4\geq 3x^3y-5x^2y^2+3xy^3$. Buradan görüleceği gibi $x>\sqrt{2}$ ve $y>\sqrt{2}$ için $3x^3y-5x^2y^2+3xy^3>x^2+y^2$ olduğunu gösterirsek iş biter. Yeniden düzenlersek, eşitsizlik, $(3xy-1)(x^2+y^2)>5x^2y^2$ eşitsizliğine denk olur. $x^2+y^2\geq 2xy$ olduğunu gözönüne alırsak, $2xy(3xy-1)>5x^2y^2$ eşitsizliğini kanıtlamak bizim için yeterli olacaktır. Sonuncu ise $xy>2$ eşitsizliğine denktir ki, bu da aşikardır.

Çözüm 3.4. (Şaban Değirmencioğlu)

Eşitsizliği şöyle yazalım:

$x^3(x-y)-y^3(x-y)>x^2+y^2-x^2y^2$;

$(x-y)(x^3-y^3)>x^2+y^2-x^2y^2$;

$(x-y)^2(x^2+y^2+xy)>x^2+y^2-x^2y^2$;

$(x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2+xy)>x^2+y^2-x^2y^2$.

$x>\sqrt{2}$ ve $y>\sqrt{2}$ olduğundan, $x^2+y^2-2xy>x^2+y^2-x^2y^2$ 'dir ve öte yandan, $x^2+y^2+xy>1$ 'dir. Bunlardan istenen sonuç çıkar.

Çözüm 3.5. (Ramazan Karaşahin)

$x^2=a$, $y^2=b$, $xy=c$ dersek, eşitsizlik

$$a^2+c^2+b^2>a+b+ac+bc$$

şekline dönüşür.

$$\frac{a^2+c^2}{2}\geq ac\ ,\quad \frac{b^2+c^2}{2}\geq bc\ ,$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$$

eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, $ab+bc+ac>a+b+ac+bc$ eşitsizliğinin sağlanacağını kanıtlamak yeter. Sonuncu eşitsizlik ise, $a>2$ ve $b>2$ olmak üzere, $ab>a+b$ eşitsizliğine denktir ki, bu da çok açık bir eşitsizliktir.

Çözüm 3.6. (Melih Onuş)

$$(x-y)^2(x^2+y^2+xy)\geq 0\Rightarrow$$

$$(x-y)(x-y)(x^2+y^2+xy)\geq 0\Rightarrow$$

$$(x-y)(x^3-y^3)\geq 0\Rightarrow x^4-xy^3-xy^3+y^4\geq 0.$$

Böylece, $x^2>2$ ve $y^2>2$ eşitsizliklerini sağlayan x ve y 'ler için $x^2.y^2>x^2+y^2$ olduğunu göstermek yeter. $x^2y^2>2y^2$ ve $x^2y^2>2x^2$ eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak, işimiz biter.

Çözüm 3.7. (Kağan Kurşungöz)

Eşitsizliği şöyle yazalım:

$$x^3(x-y)-y^3(x-y)>x^2+y^2-x^2y^2\Rightarrow$$

$$(x-y)(x^3-y^3)>x^2+y^2-x^2y^2$$

$$\Rightarrow (x-y)^2(x^2+xy+y^2) > x^2+y^2-x^2y^2.$$

$x^2 > 2$, $y^2 > 2$ olmasından dolayı, sağ taraf her zaman negatiftir. Sol taraf ise ≥ 0 'dır.

Çözüm 3.8. (Hüseyin Acan)

Moorhead eşitsizliğinden, her x ve y için $x^4+y^4 \geq x^3y+y^3x$ olur. Dolayısıyla, ispatı bitirmek için $x^2y^2 > x^2+y^2$ olduğunu göstermek lazımdır. Bu ise $x^2 > 2$ ve $y^2 > 2$ için açıktır.

Çözüm 3.9. (Said Kalkan)

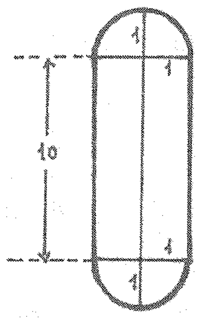
$y = x$ için eşitsizlik $x^4 > 2x^2 \Rightarrow x > \sqrt{2}$ ile denktir. Eşitsizlikte x ve y simetrik bulunduğundan, $y > x$ kabul edebiliriz: $y = x+k$, $(k > 0)$. Yerine koyarak bazı düzenlemeler yaptıktan sonra, eşitsizlik

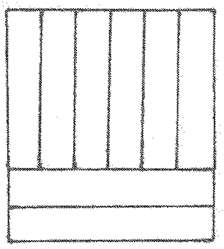
$$x^4+2x^3k+4x^2k^2+3xk^3+k^4 > 2x^2+2xk+k^2$$

biçimine dönüşür. $\sqrt{2}$ 'den büyük x 'ler için $x^4 > 2x^2$, $2x^3k > 2xk$, $4x^2k^2 > k^2$ ve $3xk^3+k^4 > 0$ olduğundan ispat biter.

Soru 4. Kenar uzunluğu 100 birim olan bir kare içine yarıçapı 1 birim olan n tane daire, kare içinde bulunan ve uzunluğu 10 birim olan her doğru parçası en az bir daire ile en az bir ortak noktaya sahip olacak biçimde yerleştirilmişse, $n \geq 416$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 4. Uzunluğu 10 birim olan parçadan uzaklıkları 1'i geçmeyen noktalar kümesinden oluşan şekle bakalım. Şimdi, kareyi 50 tane, eni 2 olan şeritlere bölelim. Şeklin uzunluğu 12 olduğundan, her şeride 8 tane olmak üzere, $50.8 = 400$ tane şekli kareye yerleştirelim. $8.12 = 96$ olduğundan aşağıda eni 4, uzunluğu 100 olan bir boş şerit kalacaktır. Oraya da $2.8 = 16$ tane şekil yerleştirebiliriz. Toplam $400+16 = 416$ şekil yerleştirebildik. Bu şekilleri "doğuran" parçaların her birinin en az bir daireyi kesmesi gerektiğinden her şekil içine en az bir dairenin merkezi düşmelidir.





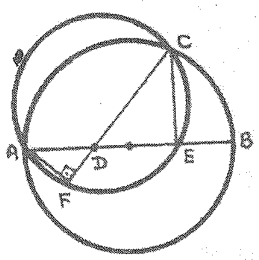
Dolayısıyla, daireler sayısı en az 416 'dır.

Soru 5. Bir çember üzerindeki herhangi bir C noktasını $[AB]$ çapı üzerindeki herhangi bir D noktasına birleştiren doğru çiziliyor. C 'den AB 'ye indirilen dikmenin ayağı E; A 'dan CD 'ye indirilen dikmenin ayağı F ile gösterilmek üzere,

$$|DC||FC| = |BD||EA|$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm 5.



CAB dik üçgeninde,

$$|CE|^2 = |AE||EB|$$

$$= (|AD| + |DE|)|EB|$$

CED dik üçgeninde,

$$|DC|^2 = |CE|^2 + |DE|^2 .$$

Böylece,

$$|DC|^2 = (|AD| + |DE|)|EB| + |DE|^2 .$$

Ayrıca, A,F,E,C çembersel olduğundan,

$$|DC||DF| = |AD||DE|$$

dir. Son iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} &|DC|^2 + |DC||DF| \\ &= (|AD| + |DE|)|EB| + |DE|^2 + |AD||DE| \\ &= (|AD| + |DE|)|EB| + (|AD| + |DE|)|DE| \\ &= (|AD| + |DE|)(|DE| + |EB|) \\ &= |AE||DB| \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} |DC|.|CF| &= |DC|(|DC| + |DF|) \\ &= |DC|^2 + |DC||DF| \\ &= |AE||DB|. \end{aligned}$$

o

Düşünmeyi sevenlere bir soru:

Belli bir yönde hareket eden bir trenin 5,5 saat harekette olduğunu varsayalım. Trenin, bu beş buçuk saatten, her bir saatlik sürede aldığı yolun 100 km/saat olduğu söylenebilir mi?

Çözüm. *Yeterince düşünmeden "evet" demeyiniz; çünkü, ortalama hızın* 100 *km/saat olması gerekmez. Örneğin, beş buçuk saatlik süreyi yarım saatlere bölelim. 11 tane yarım saat elde ederiz. Trenin hızı, ilk yarım saatte* v, $0 < v < 100$, *ikinci yarım saatte* $100 - v$, *üçüncü yarım saatte* v*; kısaca, tek yarım saatlerde* v*, çift yarım saatlerde de* $100 - v$ *km olsun. Bu durumda, beş buçuk saatlik sürenin her bir saatinde tren tam* 100 *km yol alır. Fakat, trenin ortalama hızı*

$$v_{or} = \frac{6v + 5(100 - v)}{5,5} = \frac{500 + v}{5,5} \; km/saat$$

olacaktır. Yalnız $v = 50$ *olması halinde ortalama hız,* 100 *km/saat olur; geri kalan hallerde,*

$$\frac{1000}{11} < v_{or} < \frac{1200}{11}$$

dir.

o