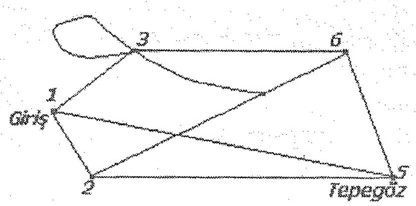
MARKOV ZİNCİRLER TEORİSİNİN ELEMANLARI

Sofia Ostrovska-Ceylan Yücesoy
Dokuz Eylül Üniversitesi, Matematik Bölümü, 35230-İZMİR

Giriş

Sunmak istediğimiz konuyu daha iyi algılamaniz için bir kaç örnek verelim:

Örnek (1) Oğuz Han, labirentte (Şekil-1) yolunu kaybetmiş ve çıkışı bulmak için uğraşıyor, ama Tepegöz 'ün onu yemek için beklediğini bilmiyor.



Şekil-1

Oğuz 'un, Tepegöz onu yemeden önce çıkışı (6) bulma olasılığı nedir?

Diyelim, Oğuz Tepegöz 'ü öldürdü. Oğuz 'un açlık ve susuzluktan ölmeden çıkışı (6) bulma olasılığı nedir?

Bütün bu sorular problemin matematiksel modeli verildikten sonra cevaplanabilir.

Her yol ağzında rotanın seçiminin Oğuz 'un önceki gezisine bağlı olmadığını kabul ederiz. Bu şekildeki problemler Markov zincirler teorisinde incelenir.

İki tane basit, şematik örnek verelim.

Örnek (2) Bir doğru üzerinde parçacığın şu şekilde hareket ettiğini düşünelim. Parçacık, koordinatları $A = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = B$ olan noktalar üzerinde olabilir. A ve B noktalarında yansıtan bariyerler var. Eğer parçacık bariyerlerdeyse,
A 'dan a_2 'ye ve B 'den a_{n-1} 'e yansıtılır.

Parçacık, $a_1, a_2, \ldots a_n$ noktalarından sağa doğru p olasılığı ve sola doğru $q = 1 - p$ olasılığı ile hareket eder.

Burada, tekrar Markov zinciri elde ederiz. Çünkü parçacığın her noktadaki hareketi daha önceki noktalardaki hareketinden bağımsızdır.

Örnek (3) Örnek 2 'deki durumun aynısını ele alalım. Sadece A ve B' deki bariyerler yutan olsun; yani, parçacık A 'ya veya B 'ye geldiğinde bu noktalarda kalır, başka yere gidemez.

Terminoloji ve Temel Kavramlar

Labirentteki yol ağızlarına ve parçacık için $a_1, \ldots a_n$ noktalarına **Markov zincirinin durumları** denir.

Markov zincirinin n tane durumu olduğunu kabul edelim. i. durumdan j. duruma gelme olasılığını $p_{i,j}$ ile gösterelim. Her durum değişikliği bir adımda yapılır. Markov'un zincir teorisinde her adımdan sonra $p_{i,j}$ 'nin aynı olduğunu kabul ederiz. $p_{i,j}$ sayıları bir kare matris oluşturur.

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

matrisi **bir-adım** geçiş matrisidir.

Geçişlerden en az bir tanesinin oluşması gerektiği için her satırdaki olasılıkların toplamı 1 'dir.

Örneklerimiz için bir-adım geçiş matrisini yazalım.

(1) Oğuz'un 1,2,3,4 yol ağızlarında yolunu rasgele seçtiğini varsayalım. Eğer 5 'e gelirse Tepegöz tarafından yenilecek; eğer 6 'ya gelirse, labirenti

terk edecek. (Bu şekilde, 5 ve 6 yutan durumlardır.)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & q & \ddots & p \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

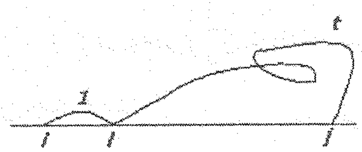
(3) Alıştırma olarak size bırakılmıştır.

i. durumdan j. duruma t adımda geçmenin olasılığını $p_{i,j}(t)$ ile gösterelim. (t, pozitif tamsayıdır.) $p_{i,j}$ sayıları $P(t)$ matrisini oluşturur.

Teorem 1. $P(t+1) = P \cdot P(t)$.

İspat. i. durumdan j. duruma $(t+1)$ adımda geçiş aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

İlk önce zincir 1 adımda l. duruma geçer sonra t adımda l 'den j 'ye geçer. (Şekil-2 'ye bakınız.)



Şekil-2

Bu şemaya göre aşağıdaki n tane varsayımı yapalım:

$H_l = \{i.$ durumdan $l.$ duruma bir adımda geçiş$\}$, $(l = 1, 2, \dots n)$. Açık olarak, $P(H_l) = p_{i,l}$.

Şimdi, $A = \{i.$ durumdan $j.$ duruma $(t+1)$ adımda geçiş$\}$, rasgele olayını düşünelim.

O zaman $P(A) = p_{i,j}(t+1)$, koşullu olasılıklar $P(A|H_l) = p_{l,j}(t)$ olur. Olasılığın Toplanma Kuralını uygulayalım:

$$P(A) = \sum_{l=1}^{n} P(H_l)P(A|H_l) \text{ veya}$$

$$p_{i,j}(t+1) = \sum_{l=1}^{n} p_{i,l} \cdot p_{l,j}(t).$$

Son formül P ve $P(t)$ matrislerinin $P \cdot P(t)$ çarpımının elemanlarını verir. O halde, $P(t+1) = P \cdot P(t)$ 'dir.

Sonuç: $P(t) = P^t$, $t = 1, 2, \dots$ (Tümevarım ile ispat yapılabilir.)

İlk-geçiş olasılığını $f_{i,j}(t)$ ile gösterelim. Bu, i. durumdan j. duruma ilk defa olarak t adımda geçme olasılığıdır. Tabii ki, $f_{i,j}(t) \leq p_{i,j}(t)$ olur. Öyleyse $f_{i,i}(t)$, i. durumdan i. duruma t adımda ilk defa olarak **yinelenme** olasılığıdır.

$f_{i,j}(t)$ olasılıklarını bulmak için aşağıdaki teoremi kullanabiliriz:

Teorem 2. $f_{i,j}(1) = p_{i,j}$ ve

$$f_{i,j}(t) = p_{i,j}(t) - \sum_{\tau=1}^{t-1} p_{j,j}(t-\tau) f_{i,j}(\tau) \quad (t \geq 2).$$

İspat. $t = 1$ için eşitlik açıktır.

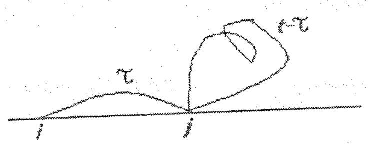
$t \geq 2$ için Olasılığın Toplanma Kuralını kullanırız. Aşağıdaki varsayımları yapalım:

$H_\tau = \{i.$ durumdan $j.$ duruma ilk defa için τ adımda geçen zincir $\}$, $(\tau = 1, \dots t)$.

$A = \{i.$ durumdan $j.$ duruma t adımda geçen zincir $\}$, rasgele olayını düşünelim.

Öyleyse, $P(H_\tau) = f_{i,j}(\tau)$ ve $P(A|H_\tau) = p_{j,j}(t-\tau)$ $(\tau = 1, \dots t-1)$, $P(A|H_t) = 1$ ve

$P(A) = p_{i,j}(t)$. (Şekil-3 'e bakınız.)



Şekil-3

Olasılığın Toplanma Kuralından

$$p_{i,j}(t) = f_{i,j}(t) + \sum_{\tau=1}^{t-1} p_{j,j}(t-\tau) f_{i,j}(\tau)$$

elde edilir.

Örnek: İkinci örneği (yansıtan bariyerler arasındaki parçacık) düşünelim. $n = 4$ ve $p = q = \frac{1}{2}$ alalım. Bu durumda bir-adım geçiş matrisi P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P(2)$ ve $P(3)$ matrisleri sırasıyla;

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$P(3) = P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

İlk-geçiş olasılıkları için Teorem 2'den $f_{i,j}(2) = p_{i,j}(2) - p_{j,j}(1)f_{i,j}(1) = p_{i,j}(2)$ elde ederiz, çünkü tüm j 'ler için $p_{j,j}(1) = 0$ 'dır. Bu olay aşağıdaki şekilde görülebilir. Eğer parçacık i. durumdan j. duruma 2 adımda gelirse, bu i. durumdan j. duruma 2 adımda ilk geliş olacaktır.

Şimdi ilk-geçiş olasılıkları $f_{i,j}(3)$ 'e bakalım. Teorem 2'yi kullanarak

$$\begin{aligned} f_{i,j}(3) &= p_{i,j}(3) - [p_{j,j}(2)f_{i,j}(1) + p_{j,j}(1)f_{i,j}(2)] \\ &= p_{i,j}(3) - p_{j,j}(2)f_{i,j}(1) \end{aligned}$$

yazabiliriz, çünkü tüm $p_{j,j}(2) \neq 0$ 'dır. O halde, $f_{i,j}(1) \neq 0$ durumunda, $f_{i,j}(3) < p_{i,j}(3)$ olur. Böylece $f_{1,2}(3) = p_{1,2}(3) - p_{2,2}(2)f_{1,2}(1) = 0$ elde ederiz.

Gerçekten, parçacık 1. durumdan 2. duruma nasıl gelebilir? Tek Yol: parçacık 1'den 2'ye ilk adımda gelir ve 1'den 2'ye bir adımda gelmeden 1'den 2'ye üç adımda gelme yolu yoktur. Öyleyse 1. durumdan 2. duruma üç adımda ilk geçişi yapmak imkansızdır. (Olasılık 0 'dır!)

Şimdi, $f_{1,4}(3) = p_{1,4}(3) - p_{4,4}(2)f_{1,4}(1) = p_{1,4}(3)$. Gerçekten, parçacık 1. durumdan 4. duruma üçten daha az adımda geçemez, öyleyse 1'den 4'e geçiş tabii ki ilk geçiş olacaktır.

Şimdi, $f_{2,1}(3) = \frac{1}{8}$, $p_{2,1}(3) = \frac{3}{8}$. Bu durumda $f_{2,1}(3) < p_{2,1}(3)$. Parçacık 2. durumdan 1. duruma üç adımda nasıl gelebilir? İki yol var: $a_2 \to a_3 \to a_2 \to a_1$ ve $a_2 \to a_1 \to a_2 \to a_1$. Birinci yolda ilk-geçiş durumunu elde ederiz. Bu mümkündür ve $f_{2,1}(3) \neq 0$. Ama ikinci yolda a_2 'den a_1 'e 3 adımda geliş $a_2 \to a_1$ adımından sonra (ilk-geçiş) olacaktır. Benzer şekilde başka bağıntıları açıklayabiliriz.

Alıştırma olarak, yutan bariyerler durumunu $n = 4$, $p = q = \frac{1}{2}$ ile düşünün ve tüm $f_{i,j}(3)$ değerlerini bulun.

Özel olarak, eğer j yutan durumsa, her τ için $p_{j,j}(\tau) = 1$ olur ve

$$f_{i,j}(t) = p_{i,j}(t) - \sum_{\tau=1}^{t-1} f_{i,j}(\tau), \quad t \geq 2$$

elde edilir. $p_{i,j}(t)$ olasılıkları, Teorem 1 ile bulunabilir.

Aşağıdaki formül

$$\pi_{i,j}(t) = \sum_{\tau=1}^{t} f_{i,j}(\tau)$$

sayısı i 'den j 'ye ilk defa için t adımdan fazla olmayarak gelme olasılığını verir.

Örnek: Oğuz-Tepegöz örneğinde $\pi_{1,6}(t)$, çıkışı t adımda bulma olasılığıdır.

Genellikle, her yutan durum için

$$\pi_{i,j} = \lim_{t\to\infty} \pi_{i,j}(t)$$

limitine bakalım. Açık olarak, $\pi_{1,6}$ Oğuz'un çıkışı bulma olasılığı ve $\pi_{1,5}$, Tepegöz tarafından yenme olasılığıdır. Yutan durum için

$$\pi_{i,j}(t) = \sum_{\tau=1}^{t} f_{i,j}(\tau) = p_{i,j}(t) \quad (t \geq 1)$$

olur (Teorem 2 'nin sonucundan).

Bu formül aşağıdaki şekilde açıklanabilir: i. durumdan j. duruma t adımda geçiş, ilk defa ya bir adımda, ya da iki adımda, ... veya n adımda geçiş olarak anlaşılabilir. Öyleyse, yutma olasılığı şu şekilde yazılabilir:

$$\pi_{i,j} = \lim_{t\to\infty} \pi_{i,j}(t) = \sum_{\tau=1}^{\infty} f_{i,j}(\tau).$$

Limitin her zaman mevcut olduğuna dikkat ediniz; çünkü $\{\pi_{i,j}(t)\}$ sınırlı, artan bir dizidir.

Aşağıdaki teorem yutma olasılıklarını doğrudan bulma yöntemi verir:

Teorem 3. Π tüm yutan durumların kümesi olsun. Öyleyse $\pi_{i,j}$ $(i \notin \Pi,\ j \in \Pi)$,

$$\pi_{i,j} = \sum_{\alpha\notin\Pi} p_{i,j}\pi_{\alpha,j} + p_{i,j} \quad i \notin \Pi,\ j \in \Pi$$

lineer denklem sistemlerini sağlar.

İspat. Teorem 1 'den

$$p_{i,j}(t+1) = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i,\alpha}p_{\alpha,j}(t).$$

$\alpha \in \Pi,\ \alpha \neq j$ için $p_{\alpha,j}(t) = 0$ olduğundan

$$p_{i,j}(t+1) = \sum_{\alpha\notin\Pi} p_{i,\alpha}p_{\alpha,j}(t) + p_{i,j}p_{j,j}(t)$$

elde ederiz. Açık olarak, $p_{j,j}(t) = 1$ (yutan durum!) ve

$$p_{i,j}(t+1) = \sum_{\alpha\notin\Pi} p_{i,\alpha}p_{\alpha,j}(t) + p_{i,j}$$

olur. $t \to \infty$ iken limite geçersek, teoremdeki ifadeyi elde ederiz.

Şimdi, Oğuz 'un Tepegöz 'ü öldürdüğünü varsayalım. Oğuz, eğer yemeksiz T gün kalabilirse, kurtulma olasılığı $\pi_{5,1}(T) + \pi_{5,6}(T)$ olur (hem girişten hem çıkıştan gidebileceğini kabul ettik).

Prof. Vladimir Azarin'e ve Prof. Refail Alizade'ye yardımları için teşekkür ederiz.