GAUSS TOPLAMLARI İÇİN AÇIK FORMÜLLER

Ogün Doğru
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ANKARA

YAYIN KURULUNUN GÖRÜŞÜ: Ogün Doğru, bu yazısında, günümüz anlayışına göre nereden çıkartıldığı bilinemeyen bir öngörüden (tahminden) yola çıkarak Gauss toplamları için bazı formüller elde etmektedir. Yazar bu formülleri elde ederken

$$f_s(n)=\sum_{k=1}^{n} k^s$$

ifadesindeki n ayrık değişkenine göre türev ve integral almaktadır. Bu işlemlerin, bilinen analiz kavram ve kuralları ile tutarlı olduğunu söylemek olanaklı değildir. Bu gözlemlerle, okuyucularımızın ilginç bulacakları ve belki de O. Doğru`nun yöntemlerine yeni yorumlar getirecekleri düşüncesiyle bu yazıyı sizlerin görüşüne sunmaktayız.

Bu çalışmada, $\sum_{k=1}^{n} k^s, (s=1,2,...)$ şeklinde tanımlı olan ve "Gauss toplamları" olarak bilinen bu ifade için çift dereceli Bernoulli katsayılarını içeren formüller elde ettik. Bu formülleri elde ederken [3] 'de E. Alkan 'ın yaptığı gibi Bernoulli katsayılarının elde edilmesi için

$$\frac{x}{e^x-1}$$

fonksiyonunun x=0 'daki Taylor açılımını kullanmak yerine, bilinenlerden farklı bir metot kullanarak, sonuçta Bernoulli katsayılarını karşımıza çıkaran ve Gauss toplamlarının açıkça hesaplanmasını sağlayan formüller elde ettik. Ayrıca bu formülleri matematikçiler tarafından çok sık kullanılan bir bilgisayar programı olan "Mathematica" programına da adapte ettik. Şimdi bu formülleri nasıl bir metotla elde ettiğimizi açıklayalım: Hemen belirtelim ki doğru bir tahmin $\sum_{k=1}^{n} k^s, (s=1,2,...)$ toplamının n değişkenine göre $s+1$. basamaktan bir polinom olduğu ve ayrıca da bu toplamı $f_s(n)$ şeklinde gösterirsek,

$$\frac{d^{s+1}f_s(n)}{dn^{s+1}}=s!$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda $s=1$ için $\frac{d^2f_1(n)}{dn^2}=1$ olacağından, iki kez integral alınarak

$$f_1(n)=\frac{n^2}{2}+C_1n+C_2 \qquad (1)$$

elde ederiz. (1) eşitliğinde $f_1(1)=1$, $f_1(2)=3$ eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$C_1+C_2=\frac{1}{2} \;;$$
$$2C_1+C_2=1$$

'den $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=0$ bulunur. Bu değerler (1) 'de yerlerine yazılırsa,

$$f_1(n)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

elde edilmiş olur. Benzer şekilde $s=2$ için $\frac{d^3 f_2(n)}{dn^3}=2!$ olup, buradan üç kez integral alındığında

$$f_2(n)=\frac{n^3}{3}+D_1n^2+D_2n+D_3 \tag{3}$$

olur. (3) eşitliğinde $f_2(1)=1$, $f_2(2)=5$, $f_2(3)=14$ eşitliklerinin kullanılmasıyla, $D_1=\frac{1}{2}$, $D_2=\frac{1}{6}$, $D_3=0$ bulunur. Bunların (3) `de kullanılmasıyla,

$$f_2(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \tag{4}$$

elde ederiz. Bu metodu ardışık olarak uygular ve genellemeye ulaşmak için katsayıları düzenlersek,

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{n}1=n \\
\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{6}n \\
\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}n^3-\frac{1}{30}n \\
\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{2}n^5+\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}n^4-\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{2}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n}k^6=\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}n^5-\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}n^3+\frac{1}{42}n \\
\sum_{k=1}^{n}k^7=\frac{1}{2}n^7+\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}n^6-\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}n^4+\frac{1}{42}\cdot\frac{7}{2}n^2 \qquad (5) \\
\sum_{k=1}^{n}k^8=\frac{1}{2}n^8+\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}n^7-\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{5}n^5+\frac{1}{42}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{8}{3}n^3-\frac{1}{30}n \\
\sum_{k=1}^{n}k^9=\frac{1}{2}n^9+\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}n^8-\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{9}{6}n^6+\frac{1}{42}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{4}n^4-\frac{1}{30}\cdot\frac{9}{2}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n}k^{10}=\frac{1}{2}n^{10}+\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}n^9-\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{9}{6}\cdot\frac{10}{7}n^7+\frac{1}{42}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{10}{5}n^5- \\
-\frac{1}{30}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{10}{3}n^3+\frac{5}{66}n \\
\text{-----}
\end{gathered}$$

olduklarını görebiliriz. Dolayısıyla

$$f_s(n) = \sum_{k=1}^{n} k^s = \frac{1}{2}n^s + C_{s,0}n^{s+1} + C_{s,1}n^{s-1} + C_{s,2}n^{s-3} + \cdots + C_{s,t}n^{s-(2t-1)}$$

yazabiliriz. Burada, $t = 0,1,2,\ldots,\left[\left|\frac{s}{2}\right|\right]$ `dir. Sonuçta

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \frac{1}{2}n^s + \sum_{t=0}^{\|s/2\|} C_{s,t}n^{s-(2t-1)} \tag{6}$$

olup, (5) `den dolayı

$$C_{s,0} = \frac{s!}{(s+1)!0!}B_0 ; B_0 = 1 \; ; \qquad C_{s,1} = \frac{s!}{(s-1)!2!}B_2 ; B_2 = \frac{1}{6} \; ;$$
$$C_{s,2} = \frac{s!}{(s-3)!4!}B_4 ; B_4 = -\frac{1}{30} \; ; \qquad C_{s,3} = \frac{s!}{(s-5)!6!}B_6 ; B_6 = \frac{1}{42} \; ;$$
$$C_{s,4} = \frac{s!}{(s-7)!8!}B_8 ; B_8 = -\frac{1}{30} \; ; \qquad C_{s,5} = \frac{s!}{(s-9)!10!}B_{10} ; B_{10} = \frac{5}{66} \; ; \quad ---$$

`dır. $1, \frac{1}{6}, \frac{-1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{-1}{30}, \frac{5}{66}, \ldots$ sayıları çift dereceli Bernoulli katsayıları olup,

$$B_{2t} = \sum_{k=0}^{2t} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^{2t} ; t \geq 0$$

şeklinde tanımlıdır (bak. [4]). O halde

$$C_{s,t} = \frac{s!}{(s-(2t-1))!(2t)!}B_{2t} \tag{7}$$

olacaktır. (7) nin (6) `da kullanılmasıyla;

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \frac{1}{2}n^s + \sum_{t=0}^{\|s/2\|} \frac{s!}{(s-(2t-1))!(2t)!}B_{2t}n^{s-(2t-1)} \tag{8}$$

formülünü elde ederiz. Diğer taraftan

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

eşitliğinden hareket ederek ve bu çalışmada kullanılan metot kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^s = -\sum_{t=0}^{\|s/2\|} (2^s - 2^{s-(2t-1)}) \frac{s!}{(s-(2t-1))!(2t)!}B_{2t}n^{s-(2t-1)} \tag{9}$$

olduğunun gösterilmesi okuyucuya bırakılmıştır.

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^s = 2^s \sum_{k=1}^{n} k^s$$

olması nedeniyle (8) `den dolayı

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^s = 2^s \left[\frac{1}{2}n^s + \sum_{t=0}^{\|s/2\|} \frac{s!}{(s-(2t-1))!(2t)!}B_{2t}n^{s-(2t-1)} \right]$$

yazabiliriz.

İlgili okurlar için (8) ve (9) formüllerini "Mathematica" programlama dilinde verecek olursak (bakınız [5]);

(8) formülü:

$$g[s\_]:=n^\wedge s/2+Sum[BernoulliB[2*i]*s!*n^\wedge(s+1-2*i)/((s+1-2*i)!*(2*i)!),\{i,0,s/2\}]$$

şeklinde, (9) formülü de

$$h[s\_]:=Sum[-BernoulliB[2*i]*s!*2^\wedge(s+1-2*i)*(2^\wedge(2*i-1)-1)*n^\wedge(s+1-2*i)$$
$$/((s+1-2*i)!*(2*i)!),\{i,0,s/2\}]$$

şeklinde olacaktır. Bu formüller yardımı ile seçilen her s değeri için $\sum_{k=1}^{n} k^s$ toplamının açık ifadesini elde etmek mümkündür. Buna ek olarak bu formüller bizim aşağıdaki eşitlikleri de yazmamıza imkan verir :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\frac{(3n^2+3n-1)}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\frac{(3n^4+6n^3-3n+1)}{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\frac{(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{15}$$

.....

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \frac{(2n^2+2n-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \frac{(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \frac{(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)}{5}$$

.....

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \left[\frac{n(4n^2-1)}{3}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^4 = \left[\frac{n(4n^2-1)}{3}\right]\frac{(12n^2-7)}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^6 = \left[\frac{n(4n^2-1)}{3}\right]\frac{(48n^4-72n^2+31)}{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^8 = \left[\frac{n(4n^2-1)}{3}\right]\frac{(320n^6-880n^4+956n^2-381)}{15}$$

.....

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^5=n^2\,\frac{(16n^4-20n^2+7)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^7=n^2\,\frac{(48n^6-112n^4+98n^2-31)}{3}$$

.....

Bu son eşitliklerin sağ tarafındaki ifadelerin pay kısmındaki polinomların katsayıları toplamının kendi paydalarına eşit olması da ilginçtir.

Belirtelim ki bu eşitliklerle birlikte (8) ve (9) formüllerinin her birisi tümevarım metodu ile veya [3] `deki gibi Bernoulli katsayılarını veren seri açılımından ispatlanabilir. Ancak biz burada bu formüllerin çıkarılmasına ilişkin yeni bir metot vermekle birlikte, bu metodu ardışık kullanarak Bernoulli katsayılarını hiç hesaba katmadan da Gauss toplamlarının hesaplanabileceğini gösterdik.

KAYNAKLAR

[1] H. İ. Karakaş - I. Aliyev, Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, TÜBİTAK, 1996.
[2] T. Terzioğlu, Gauss Formülünün Genelleştirilmesi, Matematik Dünyası Cilt: 2, Sayı 3.
[3] E. Alkan, Gauss Toplamları Üzerine, Matematik Dünyası Cilt: 6, Sayı 4.
[4] H .W. Gould, Explicit Formulas for Bernoulli Numbers, Amer. Math. Monthly 79 (1972), 44-51.
[5] S. Wolfram, "Mathematica" A System for Doing Mathematics by Computer, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1991).

------ o ------

Soru: Bir matematikçi, evindeki duvar saatinin durduğunu farkettiğinde, evinden çıkıp üç-dörtyüz metre uzaklıktaki bir evde oturan arkadaşına gitti; arkadaşı ile bir kahve içip bir süre sohbet ettikten sonra evine dönerek, saatini ayarladı. Matematikçi saatini nasıl ayarladı?

Yanıt: Matematikçi, arkadaşının evine kadar olan yolu ne kadar zamanda gittiğini bilirse, problem çözülür. Matematikçinin, arkadaşının evine gitmek için harcadığı zamana t_0 diyelim. Matematikçi, evden çıkarken saatini, diyelim ki, 9:00 a ayarlayıp çalıştırır ve sabit adımlarla arkadaşının evine gelerek onun saatine bakar. Diyelim ki, saatin 9:15 olduğunu görür. Orada bir süre, (diyelim ki, 30 dakika) oturduktan sonra saate bakar (saat 9:45 olmuştur) ve evine döner (yine sabit adımlarla). Eve gelince saatine bakar, diyelim ki saatinin 10:30 olduğunu görür. Demek ki, o evden ayrılalı tam bir buçuk saat olmuş; bunun yarım saati sohbette, bir saati ise yolda geçti. Buradan, t_0 =30 dakikadır. Matematikçi, saatini 11:15 e ayarlar.