ANALİZ NEDİR?

Ali Ülger
Koç Üniversitesi, Matematik Bölümü, İSTANBUL

Bu yazının amacı, öğrenciler tarafından çok sorulan "Analiz nedir ve nasıl gelişmiştir ?" sorularına yanıt vermeye çalışarak, onlara yararlı olmaktır. Bu soruları yanıtlamaya geçmeden önce matematiğin tarihi ve gelişimi hakkında, çok kısa da olsa, bilgi vermek yararlı olacaktır.

Matematik tarihi, gelişimi açısından, dört dönemde ele alınabilir. Bu dönemler: (a) Tarih başından antik çağ Yunan matematiğine (M.Ö.7 - M.S. 3. yüzyıllar arası) kadar olan dönem. (b) Bu dönemden Newton (1642-1727) ve Leibniz 'e (1646-1716) kadar olan 14-15 yüzyıllık dönem. (c) Bu tarihten Cantor 'a (1845-1918) kadar olan klasik matematik dönemi (18. yüzyılın başından 20. yüzyılın başına kadar olan dönem); ve (d) Cantor 'dan günümüze kadar uzanan modern matematik dönemi.

Yazılı tarihin başlangıcından antik çağ Yunan matematiğine (Tales-Pisagor- Öklid-Apollonius-Diofant) kadar olan dönemden, günümüze ulaşan matematik bilgileri Mezopotamya ve Mısır medeniyetlerine aittir. Bu tarihlerde matematiğin daha çok muhasebe işlerinde, astronomi ile ilgili hesaplarda ve bazı geometrik ölçümlerde kullanıldığı anlaşılmaktadır. Ayrıca, matematikle uğraşan insanların, rasyonel sayılar düzeyinde dört işlem yapabildikleri ve katsayıları doğal sayı olan ikinci dereceden bazı polinomların köklerini bulabilecek düzeyde matematik bilgisine sahip oldukları anlaşılmaktadır. Yaklaşımları deneme-yanılma yöntemidir. Günümüzde anlaşıldığı anlamda "ispat" bilinmemektedir. İspat matematiğe Tales 'le (yaklaşık olarak, M.Ö. 645-547) girmiştir.

Antik çağ Yunan matematiğinin Öklid zamanına kadar olan kısmı, Öklid tarafından derlenerek kitaplaştırılmıştır. Bu kitabın, bütün zamanların en çok incelenen ve bilimsel düşünce sistemini en çok etkileyen eserlerden biri olduğu konusunda kuşku yoktur. Öklid tarafından derlenen antik çağ Yunan matematiğinin en önemli özelliği, günümüzde anlaşıldığı anlamda ispatlı, bilimsel ve modern oluşudur. Öklid 'in eserlerinde kullanılan yöntem (az sayıda aksiyom ve ilkel terimlerden hareket ederek, indirgeme yoluyla teorem ispatlamak yöntemi) bugün de bilimin kullandığı yöntemdir. Antik çağ Yunan matematiği, Arşimed'in çalışmaları dışında, temelde geometri ve aritmetiktir.

Öklid 'den Newton (1642-1727) ve Leibniz (1646-1716) zamanına kadar geçen sürede matematiğe en önemli katkılar, İslam dünyasından ve Rönesans dönemi sonrası, batı Avrupa 'dan gelmiştir. İslam dünyasının matematiğe katkıları, Yunanca eserleri Arapça'ya çevirerek dünyaya yayılmalarını sağlamak, cebirin icadı ve cebirsel denklemlerin çözümü için algoritmik yöntemler geliştirmek olarak özetlenebilir. Bilindiği gibi, algoritma deyimi, cebirin babası sayılan Al Harazmi 'nin (800 'den önce doğduğu ve 847 'den sonra öldüğü bilinmektedir.) adından türetilmiştir. İslam dünyasının matematiğe katkıları hakkında bilim tarihçileri arasında fikir birliği yoktur.

Kuşkusuz, matematiğin en önemli buluşu, türevin icadı ve türevle integral arasındaki

Newton-Leibniz Teoremi olarak bilinen ilişkinin keşfidir. Türevin bulunuşundan önce, diferansiyel denklemler -ki bunlar fiziki olayların matematiksel ifadesidirler ve matematiğin gelişmesinde her zaman itici güç olmuşlardır- olmadığından, matematik, insan merakının dışında, önemli bir itici güçten yoksun, kullanım alanı oldukça sınırlı bir bilimdi. Türevin icadı, matematiğin fizik ve mühendislik problemlerine uygulanmasını mümkün kılmış ve matematik kullanım alanı her gün genişleyen ve bütün bilim dallarını kapsayan bir konuma gelmiştir. Hiç kuşku yoktur ki, matematik bir yönüyle sanattır ve, ünlü Alman matematikçisi Jacobi'nin söylediği gibi, "Matematikçiler matematiği şu ya da bu işe yarar diye değil, insan dehasının onuru için yaparlar." Fakat hiç bir işe yaramayan bir uğraşının, uzun süre sürdürülemeyeceği ve çok gelişemeyeceği açıktır.

18. ve 19. yüzyıllar matematikte büyük birikimlerin olduğu yüzyıllardır. Bu dönem, modern matematik öncesi, klasik matematik dönemidir. Cantor 'un, 1870-90 yılları arasında kümeleri, kardinal ve sonlu ötesi (trasfinite ordinal) sayıları keşfetmesinden sonra, bütün matematiğin kümeler teorisinin üstüne oturtulmasıyla "modern matematik" dönemi başlamıştır. Modern matematik, klasik matematiğin anayasal bir düzene oturtulmuş halidir. Anayasal düzenin temel yasaları ise, kümeler teorisinden kaynaklanan yasalardır.

Matematiğin gelişimi hakkında verilen bu kısa bilgiden sonra, "Analiz nedir ve nasıl gelişmiştir?" sorularına dönelim. Analiz "matematiğin, sonsuz süreçleri inceleyen dalıdır" diye tanımlanabilir. Sonsuz süreçlerden kastedilen, limit kavramı yardımıyla tanımlanan her türlü matematiksel kavramdır. O halde ana enstrümanı limittir. Başka bir deyimle, "analiz limitle icra edilen bir senfonidir". Analiz büyük ölçüde psikoloji 'ye; cebir ise sosyoloji'ye benzer. Cebir 'de, grup gibi, bir cebirsel kümeyi oluşturan elemanların ne olduğu değil, onlar arasındaki ilişkiler (birleşme, değişme,... vb gibi) önemlidir, sosyolojide olduğu gibi... Analizde ise, önemli olan incelenen kümeden daha çok bu kümeyi oluşturan elemanların her birinin kendi özellikleridir, psikolojide olduğu gibi... Nasıl sosyoloji ile psikoloji, birbirinden çok farklı olmakla beraber, iç-içe girmiş durumda ise, analiz ile cebir de hem farklı, hem de iç-içe girmiş durumdadırlar. Biri diğerinin kavram ve yöntemlerini kullanır, ama hangi konunun analizin, hangi konunun cebirin konusu olduğu genelde bellidir. Örneğin, grup teori cebirin konusudur, ama topolojik gruplar analizin konusudur. Analizin temel konusu fonksiyonlar ve fonksiyonların oluşturdukları kümelerdir. Fonksiyon kavramı çok eskiden beri kullanılmakla beraber, günümüzde kullanıldığı anlamda, (X ve Y herhangi iki küme olmak üzere, $X \times Y$ kartezyen çarpım kümesinin bir altkümesi f olsun. Eğer her x elemanı için, (x, y) çifti f 'de olacak şekilde sadece bir tane y elemanı var ise, f altkümesine X 'den Y 'ye bir fonksiyon veya dönüşüm denir ve $y = f(x)$ yazılır.), matematikte kullanılmaya başlanması 1830 'lardan sonra Dirichlet (1805-1859) ve Riemann 'la (1826-1866) olmuştur. Bundan önce fonksiyondan anlaşılan, analitik ifadesi veya ($y = x^2 + 1$) gibi belli bir formülü olan bağıntılardı. Dirichlet fonksiyonu (rasyonel sayıların karakteristik fonksiyonu) gibi bir fonksiyona henüz fonksiyon gözüyle bakılmıyordu. Fonksiyon denince akla onun üç önemli özelliği gelir. Bunlar, süreklilik, türevlenebilirlik ve integrallenebilirliktir. Analizin gelişimi büyük ölçüde bu kavramların gelişimidir. Bu kavramlar günümüzde de incelenmekte ve gelişimleri devam etmektedir.

Bu kavramlardan süreklilik, sezgisel düzeyde de olsa çok eskiden beri kullanılmaktadır. Fakat, günümüzde kullanıldığı anlamda tanımlanması 1820 'lerde A. Cauchy (1789-1857) tarafından yapılmıştır. Düzgün süreklilik kavramı ise 1850 'lerden sonra Weierstrass (1815-

1897) ve öğrencileri tarafından tamamlanarak kullanılmaya başlanmıştır. Sezgisel anlamda, sürekli bir fonksiyondan anlaşılan 'grafiğini elimizi kaldırmadan çizebileceğimiz fonksiyondur'. Bu tanım global karakterli bir özellik tanımlamaktadır. Oysa süreklilik noktasal karakterli bir özelliktir. Örneğin, her irrasyonel x sayısı için, $f(x) = 0$; ve her indirgenemeyen $x = \frac{m}{n}$ kesiri için, $f(x) = \frac{1}{n}$ olarak tanımlanan f fonksiyonu karşısında sezgisel tanım çaresizdir ve söyleyebileceği tek söz onun sürekli olmadığıdır. Oysa bu fonksiyon her irrasyonel noktada sürekli, her rasyonel noktada süreksizdir. Bu örnek, sezgisel tanımın yetersizliğini ve sürekliliğin noktasal bir özellik olduğunu açık bir şekilde göstermektedir.

İntegral kavramının 2500 yıllık bir geçmişi vardır. Bu kavram Arşimed 'e (M.Ö. 287-212) ve Arşimed tarafından çalışmalarına atıfta bulunulan Ödoks 'a kadar gitmektedir. Ödoks'tan zamanımıza yazılı bir belge kalmamış olduğundan, Ödoks'un bu konuya katkısının ne olduğu pek bilinmemektedir. Arşimed bazı cisimlerin alan ve hacim hesaplarını, bu cisimleri, alanı ya da hacmi bilinen geometrik şekillere bölerek ve bu bölümleri sınırsız çoğaltıp "limite" geçerek doğru olarak yapabilmiştir. Bu nedenle Arşimed 'i, analizin kurucusu ve büyükbabası kabul etmek yanlış olmasa gerekir. İntegralle ilgili en önemli buluş, integral ile türevin ilişkisini veren Newton-Leibniz Teoremidir. Bu teorem analizin önünü açmış ve onun çok geniş kapsamlı bir bilim dalı olarak oluşmasını sağlamıştır. 19. yüzyılın ilk yarısına kadar integral daha çok türevin tersi (antiderivative), olarak anlaşılmış ve kullanılmıştır. "İntegrallenebilirlik" kavramı ise Riemann tarafından matematiğe kazandırılmıştır. Bu kavram matematiksel düşünce sisteminde bir kilometre taşıdır, bir devrimdir. İntegrali türevin tersi (ki bu sadece sürekli fonksiyonların integralleri için doğrudur) olarak gören mantık, "bu suyu içtim, o halde içilebilirmiş" cümlesiyle özetlenebilecek bir mantıktır. Oysa, bir suyu içmeye kalkışmadan önce, onun içilebilir olup olmadığını ve hangi tür suların içilebilir olduğunu, suyu içmeden önce bilmemiz gerekir. Bu ise integrallenebilirlik kavramının mantığıdır. İntagral konusunda dev bir adım şüphesiz ölçü teorisinin ve Lebesgue (1875-1941) integralinin 20. yüzyılın başında bulunmasıdır. Lebesgue integrali güçlü bir enstrüman ve analiz ile fonksiyonel analiz arasındaki en önemli köprülerden biridir. İntegral ve ölçü teorileri konusunda çalışmalar günümüzde de devam etmektedir.

Analizin gelişmesinde en önemli buluş, Fermat (1601-1665) ve Descartes (1596-1650) tarafından kartezyen (bu sıfat Des"cartes" 'ın isminden gelmektedir) koordinat sistemi oluşturularak geometrinin analizleştirilmesinin (analitik geometri) ardından, türevin keşfidir. Ancak türevin keşfinden sonra fiziki olayların diferansiyel denklem olarak ifade edilmeleri mümkün olmuştur. Diferansiyel denklemler her zaman matematiğin ve özellikle de analizin gelişmesinde en önemli itici güç olmuşlardır. Türev ve integrali, matematiğin, fiziğin ve mühendisliğin problemlerine en kapsamlı şekilde uygulayan matematikçi Euler (1715-1789) olmuştur. 30.000 sayfanın üzerinde yayın yapan Euler tarihin en üretken matematikçisi ve analizin babasıdır. Euler 'in çalışmaları günümüze kadar çok sayıda matematikçiye esin kaynağı olmuştur. Euler derin sezgi gücüne sahip bir matematikçidir. Uğraştığı problemlerin sonucunu çoğu zaman doğru olarak sezebilmiştir. Fakat sonuca ulaşmak için verdiği ispatların bir kısmı, günümüzde ispat olarak kabul edilebilir nitelikte değildir. Bunun nedeni de Euler zamanında analizde kullanılan fonksiyon, süreklilik, yakınsaklık gibi kavramların sezgisel anlamda kullanılıyor olmasıdır. Bu kavramları ve diğer bir çok kavramı günümüzde kullandığımız şekilde tanımlayan ve analizi sağlam temellere oturtan Cauchy, Weierstrass ve onların öğrencileri olmuştur.

J. Fourier 'in (1768-1830), ısı denklemini (ki bu bir diferansiyel denklemdir) çözmek için geliştirmiş olduğu Fourier serilerinin, analizin gelişmesinde çok önemli bir rolü olmuştur. Ayrıca Fourier serilerinin yakınsaklık ve teklik sorunları modern matematiğin doğuşuna da yol açmıştır. G. Cantor, 1870 'li yıllarda Fourier serilerinin, ve daha genel olarak trigonometrik serilerin, katsayılarının tekliği konusunda çalışırken, rasyonel sayılarla irrasyonel sayıların aynı çoklukta olmadıklarını farketmiştir. Bu konuda çalışmalarını devam ettiren Cantor 'un, kümeler teorisi, kardinal ve ordinal sayılar teorilerini geliştirmesi, Modern Matematiğin doğmasına sebep olmuştur. Kümeler teorisinin yaratılmasıyla matematikçiler kendi cennetlerini bulmuşlardır. Hilbert 'in deyimiyle, artık hiç kimse matematikçileri Cantor 'un yarattığı cennetten kovamayacaktır. Yukarıda da söylendiği gibi, modern matematik, klasik matematiğin anayasal tabana oturtulmuş halidir. Sadece anayasal bir ortamda verilen bir 'ispatın' niçin ispat olup olmadığı ya da meşruluğu tartışılabilir. İspatsız ya da ispatları tartışmalı matematik olamayacağı düşünülürse, Cantor 'un yarattığı cennetin değeri daha iyi anlaşılır.

19. yüzyılın sonlarına kadar analiz, $\mathbf{R}$ veya $\mathbf{R}$ 'nin üzerinde yapılmaktaydı. 20. yüzyılın başından itibaren, M. Frechét 'nin (1878-1973) metrik uzayları tanımlaması ve $\mathbf{R}$ veya $\mathbf{R}$ üzerinde elde edilen sonuçları metrik uzaylara taşımaya başlaması ile "soyut analiz" devri, yani soyut bir X kümesinde analiz dönemi başlamıştır. Metrik uzayları topolojik uzaylar; analizi fonksiyonel analiz takip etmiştir. Bunların detayına burada girmemiz mümkün değildir. Çünkü bu yazının da bir yerde bitmesi gerekiyor ve kanımızca noktayı koyacak uygun yere gelmiş bulunuyoruz. Esenlik dileklerimizle...

— o —

SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 500.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya Şubesi 6200/30000/2203551 no'lu Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş hesabına yatırıp, dekontun aslı ile istedikleri sayıları bize bildirdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır. Elimizde bulunan sayılar:

Cilt 1	Sayı: 1,2,3
Cilt 2	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 3	Sayı: 5
Cilt 4	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 5	Sayı: 1,5
Cilt 6	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 7	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 8	Sayı: 1