DÖRDÜNCÜ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI BİRİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev
Fikri Gökdal-Doğan Çoker
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

İlki 1996 yılında yapılan Antalya Matematik Olimpiyadının dördüncüsünün birinci seçme sınavı 10 Nisan 1999 Cumartesi günü yapıldı. Akdeniz Üniversitesi Sağlık Kültür ve Spor Dairesi-Matematik Kulübü tarafından düzenlenen Antalya Matematik Olimpiyatları, Akdeniz Üniversitesi Rektörlüğü, Akdeniz Üniversitesi Sosyal Dayanışma Derneği, Antalya Eğitim ve Araştırma Vakfı tarafından desteklenmekte; Lise III öğrencilerinden dereceye girenlere bu kurumlarca karşılıksız yüksek öğrenim bursu verilmekte, Lise I-II öğrencilerinden dereceye girenlere de çeşitli ödüller verilmektedir.

Bu yıl 800 'ün üzerinde yarışmacının katıldığı seçme sınavı, Lise I-II ve Lise III adıyla iki kategoride yapıldı. Lise I-II ve Lise III öğrencilerine ayrı testler verildi, ancak testlerin 7 sorusu ortak idi. Lise I, Lise II ve Lise III öğrencilerinden birinci seçme sınavında başarılı olanlar 15 Mayıs 1999 Cumartesi günü yapılacak ikinci sınava çağırılacaklar.

Birinci Seçme Sınavında sorulan soruları, çözümleri ile birlikte sunuyoruz. Sorular, Lise I-II ve Lise III, A tipi soru kağıtlarındaki numaralarıyla verilmiştir.

Lise I-II, Soru 1. $\{1, 2, 3, \cdots, 1999\}$ kümesinin, eleman sayısı tek sayı olan kaç tane altkümesi vardır?

A) 2^{1999} B) 2^{1998} C) $2^{1998}-1$ D) 2^{999} E) hiçbiri

Yanıt. Tek sayıda elemanı olan altkümelerle çift sayıda elemanı olan altkümelerin sayısı aynıdır; çünkü tek sayıda elemanı olan her altkümenin tümleyeninin çift sayıda elemanı vardır. Dolayısıyla, istenen sayı $\frac{2^{1999}}{2} = 2^{1998}$ 'dir. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 2. $n^{1998} - 1$ sayısının 10 ile tam bölünmesini sağlayan 2000 'den küçük kaç tane pozitif , n tamsayısı vardır?

A) 200 B) 300 C) 400 D) 600 E) 800

Yanıt. Söz konusu sayıların son basamağı ya 1, ya da 9 olabilir, ortadaki iki basamak için herhangi bir kısıtlama yoktur; ancak, ilk basamak da ya 0, ya 1 'dir. Dolayısıyla, bu tür sayılardan 2.10.10.2=400 tane vardır. Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 3 (Lise III, Soru 2) $A = \underbrace{99\ldots99}_{81\ \text{tane}}$ ise, A^2 'nin rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 639 B) 729 C) 819 D) 873 E) 981

Yanıt.

$$A = \underbrace{9\ldots9}_{81} = 10^{81} - 1 \Rightarrow A^2 = 10^{162} - 2.10^{81} + 1$$

$$= \underbrace{9\ldots9}_{80}8\underbrace{0\ldots0}_{80}1$$

$\Rightarrow A^2$ 'nin rakamları toplamı $9.81 = 729$ 'dur.

Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 4. 1, 2, 3, 4, $\cdots$, 19999 sonlu dizisinin ardışık kaç teriminin toplamı 13678 'dir?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Yanıt. Ardışık k terimin toplamı 13678 olsun:

$$(a+1) + (a+2) + \cdots + (a+k) = 13678$$

$$= 2.7.977$$

$$\Rightarrow k(a + \frac{k+1}{2}) = 2.7.977.$$

Buradan, $k = 7$ olduğu görülür. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 5. (Lise III, Soru 13) Açılarının derece cinsinden ölçüleri birer tamsayı ve $A < B < C$ olmak koşuluyla kaç tane geniş açılı ABC üçgeni oluşturulabilir?

A) 1936 B) 1982 C) 1990 D) 1946 E) 1850

Yanıt. $1 \leq A < B < C \leq 177$, $A+B+C = 180$, $C \geq 91 \Rightarrow A + B = 180 - C \Rightarrow 3 \leq A + B \leq 89$. Üçgen sayısı, yani $3 \leq A+B \leq 89$ olan $1 \leq A < B$ 'ler sayısı $2(1 + 2 + \cdots + 43) + 44 = 44^2 = 1936$ 'dır. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 6. (Lise III, Soru 6) Aşağıdaki denklemin kaç reel kökü vardır?

$$\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$$

A) 0 B) 6 C) 2 D) 3 E) 1

Yanıt. Verilen denklemin her iki yanı $\sqrt{4-x^2}$ ile çarpılırsa,

$$x^3 = \sqrt{4-x^2}(4-x^2) = (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x^2 = 4-x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

(x 'in negatif olamayacağına dikkat ediniz.) Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 7. Dışbükey bir 17-genin tüm köşegenleri çizilmiş ve böylece, bir çok çokgen elde edilmiştir. Bu yeni çokgenler arasında kenar sayısı en büyük olan dışbükey çokgenin kaç kenarı vardır?

A) 34 B) 21 c) 17 D) 13 E) 12

Yanıt. Verilen çokgenin her köşesinden çıkan köşegenlerden en fazla 2 tanesi bir yeni çokgenin kenarlarını içerebilir. Dolayısıyla, yeni çokgenin kenar sayısı (köşe sayısı da) verilen çokgenin kenar (köşe) sayısından, 17 'den, fazla olamaz. Düzgün 17-genin içinde, tam ortasında, kenarları 17-genin köşegenlerinin parçalarından oluşan bir 17-gen vardır. Doğru seçenek C 'dir. (Bu sorunun ifadesinde kenar sayısı sorulan çokgenin dışbükey olması koşulu sınav soru kağıdında yazılmadığından, bu soru tüm yarışmacılarca doğru çözülmüş kabul edilmiştir.)

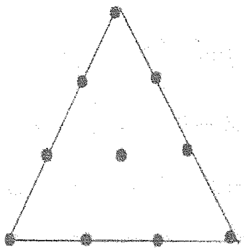
Lise I-II, Soru 8. $8 \times 8 = 64$ haneli satranç tahtası üzerinde kaç tane farklı kare çizilebilir? (Her kare tam sayıda hane içermelidir; boyutları, veya zapt ettikleri yerler farklı olan karelere farklı diyoruz. Örneğin, 64 tane 1×1 karesi çizmek mümkündür.)

A) 204 B) 132 C) 200 D) 120 E) 256

Yanıt.

Kenar uzunluğu 1 olanlar tam 8^2 tane,
kenar uzunluğu 2 olanlar tam 7^2 tane,
kenar uzunluğu 3 olanlar tam 6^2 tane,
...
kenar uzunluğu 7 olanlar tam 2^2 tane,
kenar uzunluğu 8 olanlar tam 1^2 tane,
toplam $1^2+2^2+\cdots+8^2 = 204$ tane. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

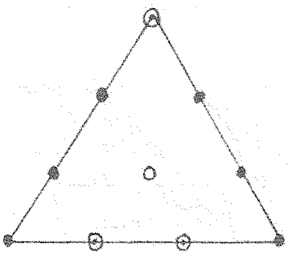
Lise I-II, Soru 9.



Şekilde, bir eşkenar üçgenin üzerinde ve iç bölgesinde her biri en az bir eşkenar üçgenin köşesi olan noktalar işaretlenmiştir. Bu noktalardan en az kaç tanesi silinmelidir ki, köşeleri, kalan noktalarda olan bir eşkenar üçgen çizilemesin?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) hiçbiri

Yanıt.



En az 4 nokta atılmalı. (Şekilde, atılması gereken noktalar çember içine alınmıştır.) Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 10. Hızı sabit olan bir gemi, bir nehrin aynı kıyısında bulunan A kentinden B kentine 5 saatte ve B kentinden A kentine 7 saatte gidiyor. Nehre atılan bir tahta parçası A kentinden B kentine kaç saatte ulaşır?

A) 6 B) 12 C) 24 D) 25 E) 35

Yanıt. Suyun (tahtanın) hızı y, geminin hızı x ise, gidilen yol $5(x+y) = 7(x-y)$ 'dir. Buradan,

$$5(\frac{x}{y}+1) = 7(\frac{x}{y}-1) \Rightarrow \frac{x}{y} = 6$$

Tahta A 'dan B 'ye $\frac{5(x+y)}{y} = 5(\frac{x}{y}+1) = 35$ saatte ulaşır. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 11. A, B, ve C farklı rakamları göstermek üzere,

$$\begin{array}{rrrr} & & & A \\ & & A & B \\ + & A & B & C \\ \hline & B & C & B \end{array}$$

ise, $A^2+B^2+C^2$ toplamı kaçtır?

A) 101 B) 97 C) 99 D) 95 E) 103

Yanıt.

$$A + 10A + 100A + B + 10B + C = 101B + 10C,$$

$$111A = 90B + 9C = 9(10B + C),$$

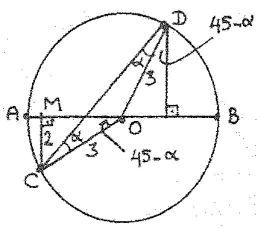
$$37A = 3(10B + C) \Rightarrow 10B + C = 74$$

$\Rightarrow A = 6, B = 7, C = 4$ ve $A^2 + B^2 + C^2 = 101$. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 12. (Lise III, Soru 18) Merkezi O noktası ve yarıçapı 3 olan bir çemberin bir çapı $[AB]$ ve bu çapı 45^o 'lik açı ile kesen bir kirişi $[CD]$ olmak üzere, $[CM] \perp [AB]$, $[DN] \perp [AB]$; $M, N \in [AB]$ ve $|CM| = 2$ ise, $|DN|$ nedir?

A) $\sqrt{5}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$

Yanıt.



$MCO \sim NOD \Rightarrow |MO| = |DN| = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 13. (Lise III, Soru 11) Bir küpün her bir yüzünü, siyah veya beyaza boyuyoruz. (Bütün yüzleri aynı renkle boyamaya da izin veriliyor.) Kaç farklı durum söz konusudur? (Küpün herhangi bir dönmesi sonucunda çakışabilen durumlar aynı kabul ediliyor.)

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 2^6

Yanıt. Beyaz renk hiç kullanılmazsa, 1 durum;
beyaz renk 1 yüze kullanılırsa, 1 durum;
beyaz renk 2 yüze kullanılırsa, 2 durum;
beyaz renk 3 yüze kullanılırsa, 2 durum;
vardır. Beyaz rengin 4 yüze kullanılması siyah rengin 2; 5 yüze kullanılması siyahın 1; 6 yüze kullanılması siyahın hiç (0) yüze kullanılması demektir. Böylece, $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ durum vardır. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 14. (Lise III, Soru 12) $3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots + 1999^3$ sayısı 999000 sayısına bölündüğünde kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1997 B) 998 C) 1998 D) 999 E) 0

Yanıt.

$$\sum_{k=1}^{999}(2k+1)^3 = 8\sum_{k=1}^{999}k^3 + 12\sum_{k=1}^{999}k^2$$

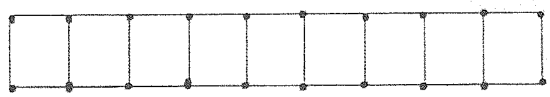
$$+6\sum_{k=1}^{999}k + \sum_{k=1}^{999}1$$

$$= 8.(\frac{999.1000}{2})^2 + 12\frac{999.1000.1999}{6}$$

$$+6\frac{999.1000}{2} + 999 = 999000A + 999.$$

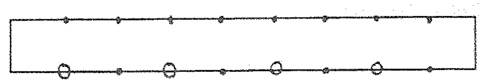
Doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 15. 1×9 boyutlarında bir dikdörtgen, şekilde görüldüğü gibi 9 tane eşit kareye bölünmüş ve bu karelerin köşeleri işaretlenmiştir. Köşeleri, işaretlenmiş noktalarda bulunan kaç tane ikizkenar üçgen çizilebilir?



A) 30 B) 38 C) 44 D) 56 E) 76

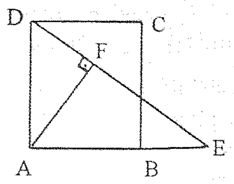
Yanıt. Her karenin her köşegeni iki tane (dik) ikizkenar üçgenin tabanı olacağından, tam $4.9 = 36$ tane dik ikizkenar üçgen çizilebilir. Çizilebilecek diğer ikizkenar üçgenlerin tabanı dikdörtgenin uzun kenarları üzerinde bulunmalıdır. Tabanı dikdörtgenin alt kenarı üzerinde bulunan ikizkenar üçgenleri saymak için, alt kenar üzerindeki noktaları aşağıdaki gibi işaretleyelim:



Tabanı alt kenar üzerinde bulunan bir ikizkenar üçgenin tabana ait köşelerinin "işareti" aynı olacağından bu üçgenlerin sayısı $2.\binom{5}{2} = 20$; simetriden dolayı, tabanı üst kenar üzerinde olanların sayısı da $2.\binom{5}{2} = 20$ 'dir. Çizilebilecek üçgenlerin toplam sayısı $36 + 20 + 20 = 76$ 'dır. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

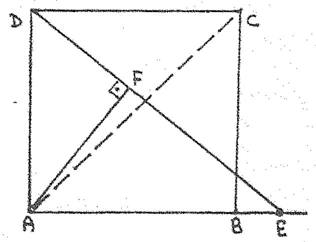
Lise I-II, Soru 16. Şekilde, $ABCD$ bir kare, $E \in [AB$ ve $|AE| = |AC|$ 'dir. $[AF] \perp [DE]$ ise,

$\frac{|EF|}{|ED|}$ nedir?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Yanıt.



Karenin kenar uzunluğu 1 birim olsun. $|AE| = |AF| = \sqrt{2}$ olur. Benzer dik üçgenlerden

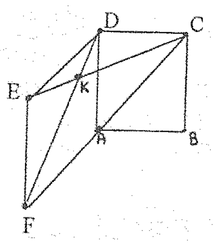
$$\frac{|AD|}{|ED|} = \frac{|DF|}{|AD|} = \frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|ED|},$$

$$2 = |AE|^2 = |EF||ED|\ ,\ 1 = |AD|^2 = |ED||DF|$$

$$\Rightarrow \frac{|EF|}{|DF|} = 2 \Rightarrow \frac{|EF|}{|ED|} = \frac{2|DF|}{3|DF|} = \frac{2}{3}$$

Doğru yanıt, B seçeneğidir.

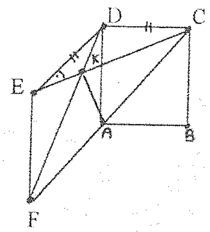
Lise I-II, Soru 17. (Lise III, Soru 19)



Şekilde, $ABCD$ bir kare ve $DEFA$ bir eşkenar dörtgendir. $[EC] \cap [FD] = K$ olmak üzere, $|KA| = m.|KC|$ ise, m nedir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{2}-1$

Yanıt.



$|KE| = |EK|$ olduğundan, $\frac{|KA|}{|KC|} = \frac{|EK|}{|KC|}$ 'dir.

$$EKD \sim CFK \Rightarrow \frac{|EK|}{|KC|} = \frac{|ED|}{|FC|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1\,.$$

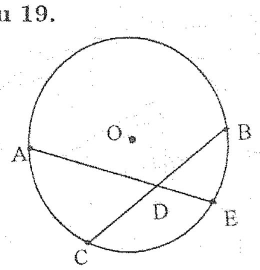
Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 18. $\frac{11n+3}{23n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$ kesrini kısaltan $k \neq 1$ doğal sayısının rakamlarının toplamı kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 15

Yanıt. Verilen kesri kısaltan k sayısı pay ve paydanın en büyük ortak böleni $(23n+2, 11n+3) = (n-4, 11n+3) = (n-4, 47) = 47$ 'yi bölmelidir. 47 asal ve $k \neq 1 \Rightarrow k = 47$ $4+7 = 11$. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

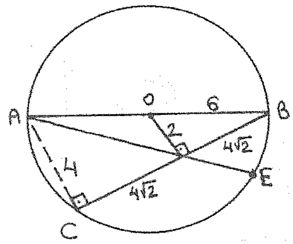
Lise I-II, Soru 19.



Şekildeki O merkezli çemberin; bir çapı $[AB]$, bir kirişi $[CB]$ 'dir. $[CB]$ nin orta noktası D ve A, D, E noktaları doğrusal noktalar olmak üzere, çemberin yarıçapı 6 ve $[BC]$ kirişinin merkezden uzaklığı 2 ise, $|DE|$ nedir?

A) $4\sqrt{3}$ B) 6 C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ E) 5

Yanıt.



$[OD] \perp [CB]$ ve $|CD| = |DB|$ 'dir. Verilenlerden, $|DB| = 4\sqrt{2}$. Benzerlikten, $|AC| = 4$. Kuvvet kuralı ile,

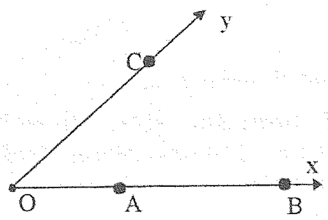
$$|AD||DE| = |BD||DC| = 32 \qquad (*)$$

Pisagor Kuralından

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |DC|^2 = 48 \Rightarrow |AD| = 4\sqrt{3}$$

(*) 'dan $4\sqrt{3}.|DE| = 32; |DE| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

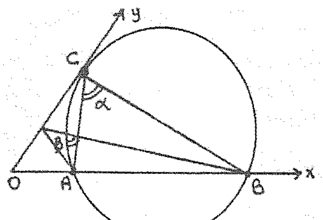
Lise I-II, Soru 20. (Lise III, Soru 20)



Şekilde, $\angle xOy$ sabit bir açı, $|OA| = 1$ ve $|AB| = 2$ 'dir. C noktası, $[Oy$ ışını üzerinde hareket eden bir nokta olmak üzere, $\angle ACB$ en büyük iken, $|OC|$ kaçtır?

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 1

Yanıt.



C noktası, A ve B 'den geçen, $[Oy$ 'ye teğet olan çemberin değme noktası olduğunda ACB en büyük olur. Bu durumda,

$$|OC|^2 = |OA||OB| = 1.3 \Rightarrow |OC| = \sqrt{3}\,.$$

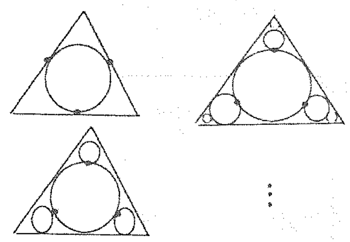
Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise III, Soru 1. 2000 'den küçük pozitif n tamsayılarından kaç tanesi için $n^{2000} - 1$ sayısı 10 ile tam bölünür?

A) 200 B) 300 C) 400 D) 600 E) 800

Yanıt. Lise I-II, Soru 2 'nin çözümüne benzer olarak, 2000 'den küçük olan ve son rakamı 1, 3, 7 veya 9 olan sayıların sayısı $4(2 \cdot 10 \cdot 10) = 800$ 'dür. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

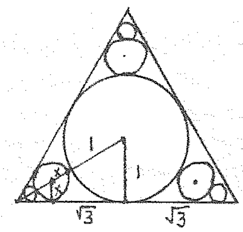
Lise III, Soru 2.



Kenar uzunluğu $2\sqrt{3}$ olan eşkenar üçgenin iç teğet çemberi çiziliyor. Üçgenin içinde ve çemberin dışında kalan üç bölgeden her birinin içine, hem kenarlara hem de çembere teğet olan birer çember çiziliyor. Bu işlem, köşelere doğru sonsuz kez tekrarlanıyor. Böylece ortaya çıkan tüm dairelerin alanlarının toplamı nedir?

A) $\frac{13\pi}{96}$ B) $\frac{11\pi}{8}$ C) $\frac{9\pi}{8}$ D) $\frac{11\pi}{96}$ E) $\frac{9\pi}{10}$

Yanıt.



İç teğet çemberin yarıçapı 1 ve ikinci çemberin yarıçapı x ile gösterilirse, üçgenlerin benzerliğinden,

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{1-x} \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Benzer şekilde üçüncü çemberin yarıçapı $\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$, k-ıncı çemberin yarıçapı $\frac{1}{3^{k-1}}$ 'dir. Bir köşeye doğru, iç teğet çember dışındaki dairelerin alanları toplamı:

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^k}\right)^2 = \frac{\pi}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^{k-1}} = \frac{\pi}{9} \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\pi}{8}.$$

Tüm dairelerin alanları toplamı:

$$3 \cdot \left(\frac{\pi}{8}\right) + \pi = \frac{11\pi}{8}.$$

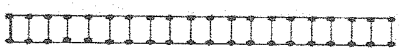
Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise III, Soru 4. 99 doğru, düzlemi n parçaya bölmüştür. n 'nin 300 'ü aşmadığı biliniyorsa, n 'nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 7 E) 3

Yanıt. Şu dört durumda n farklı değerler alır; doğruların hepsi paralel ise, $n = 100$; doğrulardan 98 'i paralel ve biri bunları kesiyorsa, $n = 2 \times 99$; doğruların 97 'si paralel ve diğer ikisi bu 97 doğruyu kesiyor, fakat kendileri kesişmiyorsa, $n = 3 \times 99$; doğrulardan 97 'si paralel ve diğer ikisi hem bu 97 doğruyu hem de birbirini kesiyor, fakat bu iki doğrunun kesim noktası diğer 97 doğrudan hiçbiri üzerinde değilse, $n = 3 \times 98 + 1$. $n < 300$ için n 'nin alabileceği değerler bunlardan ibarettir. Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise III, Soru 5. 1×19 boyutlarında bir dikdörtgen, şekilde görüldüğü gibi, 19 tane eşit kareye bölünmüş ve karelerin köşeleri işaretlenmiştir. Köşeleri, işaretlenmiş noktalarda bulunan kaç tane ikizkenar üçgen çizilebilir?



A) 200 B) 216 C) 228 D) 244 E) 256

Yanıt. Lise I-II, Soru 15 'in çözümünün aynısı tekrarlanarak doğru yanıtın E seçeneği olduğu görülür.

Lise III, Soru 7. $B = 10^{10^7} + 10^{10^6} + 10^{10^5} + 10^{10^4}$ sayısı 7 'ye bölündüğünde kalan nedir?

A) 2 B) 1 C) 4 D) 3 E) 5

Yanıt. Fermat Teoreminden $10^6 \equiv 1 (\text{mod } 7)$. Ayrıca, her $k \geq 1$ için $10^k \equiv 4 (\text{mod } 6)$. O halde, $B \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + 10^4 \equiv 2 (\text{mod } 7)$. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise III, Soru 8. Aşağıdaki denklemin reel çözümlerinin sayısı kaçtır?

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$$

A) 0 B) 1 C) 3 D) sonsuz E) hiçbiri

Yanıt. Verilen denklemde kök içindeki ifadeler "kare" olarak ifade edilebilmektedir:

$$\sqrt{(\sqrt{x-1} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 3)^2} = 1.$$

$\sqrt{x-1} = t$ diyelim. Bu takdirde, verilen denklem

$$|t - 2| + |t - 3| = 1$$

denklemine denktir. $[2, 3]$ aralığındaki her t bu denklemi sağlar. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise III, Soru 9. $F(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları tüm reel eksende verilmiş reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, her x ve y için

$$F(x + f(y)) = 3x + y + 7$$

eşitliği sağlanmaktadır. $f(2 + F(7))$ değerini bulunuz.

A) 7 B) 9 C) 10 D) 13 E) $14\frac{1}{3}$

Yanıt. $F(x + f(y)) = 3x + y + 7$. $f(0) = c$ diyelim. Bu takdirde, her x için $F(x+c) = 3x+7$ ve böylece, $F(x) = 3(x - c) + 7 = 3x + (7 - 3c)$ 'dir. Tekrar verilen denkleme dönelim:

$$3x + y + 7 = F(x + f(y)) = 3(x + f(y)) + (7 - 3c),$$

buradan

$$y = 3f(y) - 3c \Rightarrow f(y) = \frac{1}{3}y + c.$$

Şimdi,

$$f(2 + F(7)) = \frac{1}{3}(2 + F(7)) + c$$

$$= \frac{1}{3}(2 + 3 \cdot 7 + (7 - 3c)) + c = 10.$$

Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise III, Soru 10. x ve y, 2-basamaklı sayılar olup, $x < y$ 'dir. $x \cdot y$ çarpımı 2 ile başlayan 4-basamaklı bir sayıdır. Eğer bu 2 'yi silersek, geriye kalan 3-basamaklı sayı $(x + y)$ 'ye eşit oluyor. Bu özelliğe sahip kaç tane (x, y) ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) hiçbiri

Yanıt.

$$\begin{aligned} xy - 2000 = x + y &\Rightarrow xy - x - y + 1 = 2001 \\ &\Rightarrow (x-1)(y-1) = 2001 \\ &= 3 \cdot 23 \cdot 29. \end{aligned}$$

x ve y iki basamaklı sayılar ve $x < y$ olduğundan, istenileni sağlayan ikililer, $(23 + 1, 3.29 + 1)$ ve $(29 + 1, 3.23 + 1)$ 'den ibarettir. Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise III, Soru 14. Cahit öğretmen ve öğrencisi Kemal tanıştıklarında her ikisininde yaşları doğum yıllarının rakamlarının toplamına eşit idi. Cahit öğretmen ve Kemal aynı binyılda doğduklarına göre aralarındaki yaş farkı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 9 C) 10 D) 18 E) 30

Yanıt. Cahit öğretmenin doğum yılı $\overline{xyzt}$, Kemal'in doğum yılı $\overline{xabc}$ olsun. Cahit öğretmenle Kemal'in yaşları, sırasıyla, $x+y+z+t$ ve $x+a+b+c$ 'dir. Dolayısıyla, Cahit öğretmenle Kemal'in yaş farkı, iki usülle hesaplanırsa,

$$(y+z+t)(a+b+c) = \overline{xabc} - \overline{xyzt}$$

ve buradan

$$101(a-y) + 11(b-z) + 2(c-t) = 0$$

elde edilir. Burada $-9 \leq b-z \ , \ c-t \leq 9$ olduğundan, ya $a-y=0$ ya da $a-y=1$ olmalıdır. $a-y=0$ için yaş farkının sıfır olduğu görüleceğinden $a-y=1$ olmalıdır. Bu durumda,

$$11(b-z)+2(c-t) = -101 \Rightarrow z-b=9 \ , \ t-c=1;$$

yaş farkı $(y-a)+(z-b)+(t-c) = -1+9+1 = 9$ 'dur. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise III, Soru 15. Mutlu 'nun, hepsi 1 ve 5 milyonluk banknotlardan oluşan A, $110 < A < 150$ milyon lirası vardır. Mutlu, bu paranın üçte ikisi olan B milyonunu harcadıktan sonra elinde kalan 5 milyonluk banknotların sayısının başlangıçtaki 1 milyonluk banknotlar kadar ve 1 milyonlukların sayısının da başlangıçtaki 5 milyonluklar kadar olduğunu farkediyor. $A-B$ farkının rakamlar toplamı kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Yanıt. 1 milyonluklar sayısı x, 5 milyonluklar sayısı y olsun. Bu takdirde, $A = x+5y$ ve problemin koşullarından,

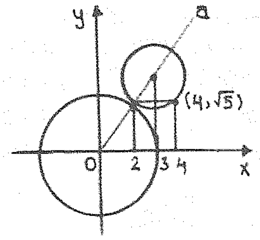
$$\frac{1}{3}(x+5y) = 5x+y \Rightarrow y = 7x \Rightarrow A = 36x.$$

$110 < 36x < 150 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A = 144, B = 96$ $\Rightarrow A-B = 48$. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise III, Soru 16. Düzlemde xOy dik koordinat sisteminde $x^2+y^2=9$ çemberine $(2,\sqrt{5})$ noktasında teğet olan ve $(4,\sqrt{5})$ noktasından geçen çemberin sınırladığı bölgenin alanı kaç π 'dir?

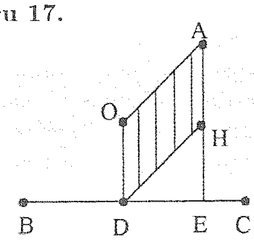
A) 5 B) 9/2 C) 4 D) 3 E) 9/4

Yanıt.



Koordinat sisteminin merkezinden ve $(2,\sqrt{5})$ noktasından geçen doğrunun denklemi $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 'dir ve bu doğru, sözkonusu çemberin merkezinden geçer. Bu çemberin merkezinin apsisi 3, ordinatı $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ve dolayısıyla, yarıçapı $\frac{3}{2}$; alanı $\frac{9\pi}{4}$ 'tür. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

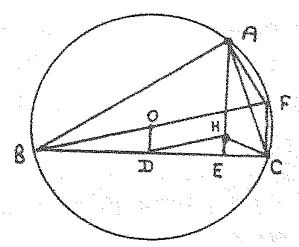
Lise III, Soru 17.



Çevrel çemberinin merkezi O, $[BC]$ 'nin orta noktası D olan bir ABC üçgeninin yüksekliklerinin kesişim noktası H, $[AH] \cap [BC] = \{E\}$, olmak üzere, $|OD| = |DE|$ ve alan $(AODH) = 9$ ise, $|OD|$ nedir?

A) $\frac{9}{4}$ B) 2 C) $\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{6}$ E) $\frac{5}{2}$

Yanıt.



$|OD| = x$ diyelim. Şekilde, B ve O noktaları birleştirilip uzatılarak F noktası elde edilmiştir. Yüksekliklerin kesişim noktası H ve BF çap olduğundan, $AHCF$ dörtgeninin bir paralelkenar olduğu görülür. BCF ve BDO dik üçgenlerinin benzerliğinden, $|FC| = 2.|OD| = 2x$, ve böylece $|AH| = 2x$ olur. $AODH$ bir yamuk olduğundan, bu yamuğun alanı

$$x \cdot \frac{x+2x}{2} = 9 \Rightarrow x = \sqrt{6}.$$

Doğru yanıt, D seçeneğidir.