

## PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

**Uyarı:** Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

### ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

**A.181.**  $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$  denkleminin tüm tamsayı çözümlerini bulunuz.

**A. 182.** Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$x + y + z = a$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

**A. 183.**  $a, b$  ve  $c$  doğal sayılarının ortak katlarının en küçüğü (OKEK), ve ortak katlarının en büyüğü (OBEB), sırasıyla,  $[a, b, c]$  ve  $(a, b, c)$  olsun.  $x$  ve  $y$  doğal sayılarının OBEB i de  $(x, y)$  ile gösterilmek üzere

$$\frac{[a, b, c]}{(a, b, c)} (a, b)(a, c)(b, c) = abc$$

olduğunu kanıtlayınız.

**A. 184.** Herhangi 3 paralel doğru verilmiş olsun. 3 köşesi bu doğrular üzerinde bulunan bir kare çiziniz.

**A. 185.** Çevrel çemberinin yarıçapı 1 olan bir üçgenin, iç teğet çemberinin yarıçapı  $r$  ve yükseklik ayaklarını köşe alan üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı  $r'$  ise,  $r' \leq 1 - \frac{1}{3}(1 + r)^2$  olduğunu ispatlayınız.

### YARIŞMA SORULARI

**Y.181.** Herhangi bir  $a$  doğal sayısı için  $a^{10} + a^5 + 1$  sayısının bir bileşik sayı olduğunu gösteriniz.

**Y. 182.**  $P(x) = ax^2 + bx + c$  polinomunun her tamsayıda aldığı değer, bir tamsayının dördüncü kuvvetine eşit ise  $a = b = 0$  olduğunu gösteriniz.

**Y. 183.**  $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = 77$  denkleminin tamsayılarda hiç çözümü bulunmadığını gösteriniz.

**Y.184.** Bir ABC üçgeninde  $h_a, h_b, h_c$  yükseklikler;  $l_a, l_b, l_c$  açıortaylar;  $m_a, m_b, m_c$  ke-

narortaylar ve  $r$  içteğet çemberin yarıçapı olmak üzere

$$g_r \leq h_a + h_b + h_c \leq l_a + l_b + l_c \leq m_a + m_b + m_c$$

olduğunu kanıtlayınız.

**Y. 185.** Dışbükey ABCDE beşgeninde,  $ABC, BCD, CDE, DEA$  üçgenlerinin her birinin alanı 2,  $EAB$  üçgeninin alanı ise 3'tür. Beşgenin alanını bulunuz.

### ÇÖZÜMLER

**A.171.** Aşağıdaki sayılardan hangisi daha büyüktür?

$$(123456789!)^2, \text{ yoksa } 123456789^{123456789}$$

**Çözüm.** Her doğal sayı  $n > 2$  için  $(n!)^2 > n^n$  olduğunu gösterelim.

$$(n!)^2 = n!n! = (1.2.3\dots n)(n\dots 3.2.1) = [1.n][2(n-1)] \dots [k(n-k+1)] \dots [n.1]$$

Her  $k$ , ( $2 \leq k < n$ ) için  $k.(n-k+1) = (n-k)(k-1) + n > n$  olduğundan, yukarıdaki ifadeden

$$(n!)^2 > \underbrace{n.n\dots n}_{n \text{ defa}} = n^n$$

olduğu görülür.

**A.172.** Ardışık 10 tamsayıdan en az biri geri kalan dokuz sayı ile aralarında asaldır; gösteriniz.

**Çözüm.**  $n, n+1, \dots, n+9$  ardışık 10 tamsayı olsun.  $s > r$  olmak üzere,  $(n+r, n+s) = (n+r, s-r)$  ve  $0 < s-r < 10$  olduğundan bu sayılardan en az birinin 10'dan küçük hiç bir asal sayı ile bölünemediğini göstermek yeter.

Sözü edilen sayılar arasında:

2 ile bölünenlerin sayısı 5;

3 ile bölünen ve tek olanların sayısı en çok 2;

5 ile bölünen ve tek olanların sayısı tam 1;

7 ile bölünen ve tek olanların sayısı en çok 1'dir.

10 ardışık sayı içinde tam 5 tane tek sayı olduğundan ve 5 tek sayıdan 3, 5 veya 7 ile bölünenlerin sayısı en çok  $2 + 1 + 1 = 4 < 5$  olduğundan, tek sayılardan en az biri 3, 5 ve 7

bu sayı bir  $\pi$  bölünemez. Bu tek sayı değerleri  $\pi$  bölünmez. Bu tek sayı değerleri  $\pi$  bölünmez.

**Örnek 170.** Çarpımları 1'e eşit olan üç tane pozitif sayının toplamı bu sayıların terslerinin toplamından büyük ise, bu takdirde söz konusu sayıların biri 1'den büyük diğeri 1'den küçük olacaktır.

**Çözüm.** Çarpımları 1'e eşit olan üç tane pozitif sayı  $x, y, z$  diyelim. Varsayıma göre,

$$x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Her iki tarafı eşitsizlikten;

$$(x + y + z)^2 < (x + y)xy + 1,$$

$$(x + y)^2 - 1 + (x + y)(1 - xy) < 0,$$

$$(x + y - 1)(x + y + 1) - (xy - 1)(x + y) < 0,$$

$$(x + y - 1)(xy + 1 - x - y) < 0,$$

$$(x + y - 1)(x - 1)(y - 1) < 0$$

Her iki tarafı Sonuncu eşitsizlikten kolayca görüldüğü gibi,  $x, y$  ve  $\frac{1}{xy}$ 'den yalnız biri 1'den büyük diğeri ikisi ise 1'den küçük olmalıdır.

**Örnek 171.**  $a \in \mathbb{R}$  sayısı  $a^5 - a^3 + a = 2$  denklemini sağlarsa,  $3 < a^6 < 4$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $a \neq 0$  olduğu açıktır. Şimdi,

$$a^5 + 1 = (a^2)^3 + 1^3 = (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) = (a^2 + 1)(a^2 - a^3 + a) = 2(a^2 + \frac{1}{a}).$$

Her iki tarafı eşitlikten,  $a > 0$  olduğu görülür.

Bu yüzden,  $(a + \frac{1}{a}) \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$  ve  $a \neq 1$  olduğundan,  $a + \frac{1}{a} > 2$ 'dir. Böylece,

$$a^5 + 1 = 2(a + \frac{1}{a}) > 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow a^6 > 3.$$

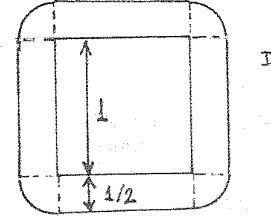
Yine de  $2 + a^5 = a^5 + a$  eşitliğinin her iki yanını  $a^2$ 'ye bölerek,

$$\frac{2 + a^5}{a^2} = \frac{a^5 + a}{a^2} \Rightarrow \frac{2}{a^2} + 1 = a^2 + \frac{1}{a^2} > 2 \Rightarrow \frac{2}{a^2} + 1 > 2 \Rightarrow a^3 < 2 \Rightarrow a^6 < 4.$$

Böylece,  $3 < a^6 < 4$  olur.

**Örnek 172.**  $20 \times 25$  dikdörtgeninin içine, kenar uzunluğu 1 olan 120 tane kare atılmıştır. Dikdörtgenin içine, çapı 1 olan ve 120 karenin hiç birini kesmeyen bir daireyi yerleştirmenin mümkün olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.**



Çapı 1 olan dairenin kenara taşmaması için onun merkezi  $20 \times 25$  dikdörtgeninin kenarlarından  $\frac{1}{2}$ 'den fazla uzaklıkta bulunmalıdır ve dolayısıyla, bu merkez, alanı  $19 \cdot 24 = 456$  olan bir dikdörtgenin içinde bulunmalıdır. Bundan başka, dairenin merkezi, her bir karenin çevresinden  $\frac{1}{2}$ 'den fazla uzaklıkta bulunmalıdır, yani alanı  $3 + \frac{\pi}{4}$  şekilde gösterilen biçimde olan her parçanın dışında olmalıdır. (Şekile bakınız.) Bu tür parçaların toplam alanı en fazla

$$120(3 + \frac{\pi}{4}) = 360 + 30\pi$$

olduğundan ve bu son sayı da  $360 + 30 \cdot 3,2 = 456$ 'dan küçük olduğundan, sözkonusu parçalarla, alanı 456 olan dikdörtgeni örtmek olanaksızdır. Dolayısıyla, karelerin hiç birini kesmeyen ve  $20 \times 25$  dikdörtgeninin dışına taşmayan bir dairenin merkezi için yer bulmak mümkündür.

### YARIŞMA PROBLEMLERİ

**Y. 171.**  $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2665 \cdot 2666}$  ve  $B = \frac{1}{1334 \cdot 2666} + \frac{1}{1335 \cdot 2665} + \dots + \frac{1}{2666 \cdot 1334}$  sayıları veriliyor.  $\frac{A}{B}$  nin bir tamsayı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** Her  $k \in \mathbb{N}$  için  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  olduğunu anımsayınız. Böylece,

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2665} - \frac{1}{2666}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2666} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2666})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2666} - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1333})$$

$$= \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335} + \dots + \frac{1}{2665} + \frac{1}{2666};$$

$$2A = (\frac{1}{1334} + \frac{1}{2666}) + (\frac{1}{1335} + \frac{1}{2665}) + \dots$$

$$+ (\frac{1}{2666} + \frac{1}{1334})$$

$$= \frac{4000}{1334 \cdot 2666} + \frac{4000}{1335 \cdot 2665} + \dots + \frac{4000}{2666 \cdot 1334}$$

$$= 4000B.$$

Sonuç olarak,  $\frac{A}{B} = 2000$  'dir.

(Çözenler: Alp Şimşek (İzmir-Bornova), Cemal Özboğa (Kocaeli) )

**Y. 172.**  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ;  $n$  tane farklı pozitif sayı olsun (tam olmaları gerekmez). Bu sayılar yardımıyla elde edilen tüm mümkün toplamlar kümesini düşünelim (sayıların kendisini de söz konusu kümeyle dahil ediyoruz). Elde edilen toplamlar içerisinde, en azından,  $\frac{n(n+1)}{2}$  tane farklı sayı bulunacağını kanıtlayınız.

**Çözüm.** Sayıların artan sırada numaralanmış olduğunu varsayabiliriz:  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

Aşağıdaki şekilde toplamları oluşturalım:

$a_1$	$a_2$	...
$a_1 + a_n$	$a_2 + a_n$	...
$a_1 + a_{n-1} + a_n$	$a_2 + a_{n-1} + a_n$	...
...	...	...
...	$a_2 + a_3 + \dots + a_n$	...
$a_1 + a_2 + \dots + a_n$		
...		
...	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$
...	$a_{n-2} + a_n$	$a_{n-1} + a_n$
...	$a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$	...
...		
...		

Buradaki bütün sayıların farklı olduğunu görmek zor değildir. Bunların toplam sayısı ise  $n + (n - 1) + \dots + 1 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$  'dir.

Tam  $\frac{n(n+1)}{2}$  tane farklı toplamın ortaya çıkacağı duruma örnek olarak  $1, 2, 3, \dots, n - 1, n$  doğal sayılarını verebiliriz. Çünkü bu sayıların yardımıyla toplamlar oluşturursak, 1 'den  $(1+2+\dots+n)$  'ye kadar tüm doğal sayıları elde edebiliriz ki bunların da toplam sayısı  $\frac{n(n+1)}{2}$  'dir.

(Çözenler : Alp Şimşek (İzmir) )

**Y.173.** Bir doğru üzerinde 50 parça verilmiştir. Aşağıdaki önermelerden en az birinin doğru olduğunu kanıtlayınız:

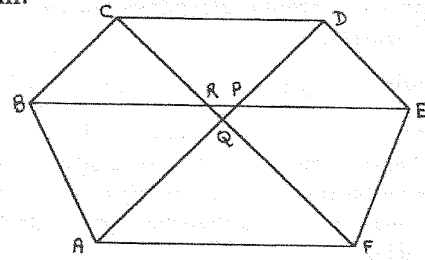
(a) Parçalardan en az 8 tanesinin ortak noktası vardır.

(b) Öyle 8 parça vardır ki, herhangi ikisinin ortak noktası yoktur.

**Çözüm.** Parçalar içerisinde sağ ucu en küçük sayı olan parçaya  $[a_1, b_1]$  diyelim. Eğer  $b_1$  noktasını içeren parçalar sayısı 7 'den fazla ise, o halde problemin (a) önermesi doğru olur. Eğer  $b_1$  'i içeren parçalar sayısı 7 veya 7 'den az ise, o halde  $[a_1, b_1]$  'den sağda bulunan en az 43 tane parça vardır. Bu 43 parça içerisinde sağ ucu en küçük sayı olan parçaya  $[a_2, b_2]$  diyelim. Eğer  $b_2$  noktasını içeren parçalar sayısı 7 'den fazla ise, problem çözülmüş olur. Fakat bu noktayı içeren parçalar sayısı 7 veya 7 'den az ise, o halde  $b_2$  'den sağda bulunan en az 36 parça vardır. Bu şekilde devam ederek, ya en az 8 parçaya ait olan nokta buluruz, ya da birbiriyle kesilmeyen öyle 7 tane  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_7, b_7]$  buluruz ki, her  $k, (1 \leq k \leq 7)$  için  $[a_k, b_k]$  'dan sağda en az  $50 - 7k$  tane parça bulunmuş olur. Bu takdirde  $[a_7, b_7]$  'den sağda da en az bir  $[a_8, b_8]$  parçası bulunacaktır ( $50 - 7 \cdot 7 = 1$  olmasına dikkat edin.) Böylece problemin (a) önermesi sağlanmadığı takdirde çift-çift kesilmeyen en az 8 parçanın bulunduğunu söyleyebiliriz.

**Y.174.** Konveks  $ABDCEF$  altıgeni verilmiştir.  $AD, BE$  ve  $CF$  köşegenlerinin her birinin altıgenin alanını yarıya böldüğü bilinmektedir. Bu köşegenlerin aynı bir noktada kesiştiklerini kanıtlayınız.

**Çözüm.**



Problemdaki özelliklere sahip bir altıgenin köşegenleri bir noktada kesişmesinler. O halde altıgenin içinde bir  $PQR$  üçgeni (şekile bakınız) oluşacaktır.

$ABCD$  ve  $BCDE$  dörtgenlerinin alanlarının eşitliğinden  $ABP$  ve  $EPD$  üçgenlerinin alanlarının eşitliği çıkar. Gerçekten,

$$A(ABP) = A(ABCD) - A(BCDP)$$

$$= A(BCDE) - A(BCDP) = A(EPD).$$

Benzer şekilde,

$$A(BCR) = A(EFR), \quad A(AQF) = A(CQD).$$

Üçgenlerin alanlarının eşitliğinden

$$AP \cdot BP = EP \cdot DP, \quad CQ \cdot DQ = AQ \cdot FQ,$$

$$ER \cdot FR = BR \cdot CR$$

olması çıkar. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak,

$$\begin{aligned} AP \cdot BP \cdot CQ \cdot DQ \cdot ER \cdot FR \\ = AQ \cdot BR \cdot CR \cdot DP \cdot EP \cdot FQ \end{aligned}$$

elde ederiz. Lakin sonuncu eşitlik mümkün değil; çünkü

$$AP > AQ, \quad BP > BR, \quad CQ > CR, \quad DQ > DP,$$

$$ER > EP, \quad FR > FQ.$$

(Eşitliğin sağlanması için  $|PQ| = |QR| = |RP| = 0$  olmalı, dolayısıyla,  $P$ ,  $Q$  ve  $R$  noktaları çakışmalıdır.)

(Çözenler: *Alp Şimşek (İzmir), Cemal Özboğa (Kocaeli), Mert Özkan Ocakoğlu (Kocaeli)*)

**Y.174.** Düzlemi bir kaç bölgeye bölen  $n$ , ( $n \geq 2$ ) tane doğru çizilmiş ve bu bölgelerin bazıları boyanmıştır. Boyama işlemi öyle yapılmıştır ki, boyanmış bölgelerin ortak sınırı yoktur (sınırlar doğru parçalarıdır). Boyanmış bölgeler sayısının  $\frac{1}{3}(n^2 + n)$ 'den

fazla olamayacağını kanıtlayınız.

**Çözüm.** Eğer tüm doğrular bir-birine paralel ise bu halde düzlem  $n + 1$  tane bölgeye bölünmüş olur ve bu durumda boyanmış bölgeler sayısının  $\frac{1}{3}(n^2 + n)$ 'den fazla olamayacağını kontrol etmek zor değil. (örneğin,  $n \geq 2$  için

$$\frac{1}{3}(n^2 + n) = n \frac{n+1}{3} \geq n \frac{2+1}{3} = n$$

eşitsizliğini gözönüne alabilirsiniz.)

Şimdi,  $n$  doğru içerisinde paralel olmayanların da bulunduğunu varsayalım. Her bir bölgenin sınırı farklı doğrulara ait doğru parçalarından ve/veya ışıklardan ibarettir. Bu parçalara ve ışıklara, uygun bölgenin kenarları diyelim. Her bölgenin en az 2 kenarı olacağı açıktır. Şimdi tüm boyanmış bölgeleri kenarlarının sayısına göre

sınıflandıralım:  $m_2$  ile 2 kenarı olan boyanmış bölgeler sayısını;  $m_3$  ile 3 kenarı olan boyanmış bölgeler sayısını; ... ; nihayet,  $m_k$  ile  $k$  tane kenarı olan boyanmış bölgeler sayısını gösterelim. Ayrıca,  $k$  nın bu sınıflandırmada maksimal sayı olduğunu varsayalım (yani, kenar sayısı  $k$  'den büyük olan boyanmış bölge yoktur.) Önce  $m_2 \leq n$  olduğunu görelim. İki kenarı olan herhangi bölgenin kenarları iki ışından ibarettir ve her bir ışın yalnız bir boyanmış bölgenin sınırı olabilir. Her doğru üzerinde en fazla 2 ışın bulunacağından ışınlar sayısı en fazla  $2n$  ve dolayısıyla 2 kenarı olan boyanmış bölgelerin sayısı en fazla  $n$  dir; yani,  $m_2 \leq n$ .

$n$  tane doğrunun her biri en fazla  $n$  kısma (parça veya ışıklara) bölünebileceğinden tüm parça ve ışınların toplam sayısı  $n \cdot n = n^2$  sayısından fazla olamaz. Öte yandan bu parça ve ışınların her biri yalnız bir boyanmış bölgenin kenarı olabileceğinden, boyanmış bölgelerin kenarlarının toplam sayısı  $n^2$  'den fazla olamaz. Başka bir ifadeyle,

$$2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots + k \cdot m_k \leq n^2 \quad (*)$$

eşitsizliği sağlanacaktır.

Bizim amacımız, boyanmış bölgeler sayısının (yani,  $m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_k$  nın) üstten tahminini bulmaktır. (\*) eşitsizliğini de gözönüne alarak şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned} m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_k \\ = \frac{3m_2 + 3m_3 + 3m_4 + \dots + 3m_k}{3} \\ \leq \frac{m_2}{3} + \frac{2m_2 + 3m_3 + \dots + km_k}{3} \\ \leq \frac{n}{3} + \frac{n^2}{3} = \frac{1}{3}(n^2 + n). \end{aligned}$$