SACCHERİ 'NİN *"EUCLİDES"* 'İ ÜZERİNE BİR METODOLOJİK-TARİHSEL ÇALIŞMA (III)

Samet Bağçe
ODTÜ, Felsefe Bölümü, 06531-ANKARA

Özetlersek, Saccheri, paralellik problemini, birbirlerini karşılıklı olarak dışarıda bırakan üç ayrı hipotezi *reductio ad absurdum*'un özel bir kullanımıyla formüle eden ilk kişidir. Bu, problemin doğasındaki ilk değişikliktir. İkinci değişiklik ise problemin tanımıyla ilgilidir. Problem, dörtgenler, üüçgenler ve açılar çerçevesinde yeniden tanımlanmıştır. Bu da, paralellik teorisiyle bir üçgenin açılarının toplamı arasındaki temel bağlantıyı kurmuştur.

Tüm bunlar, Saccheri 'nin *reductio ad absurdum*'u ve Saccheri dörtgenini belirli bir biçimde kullanışının neticesinde ortaya çıkan değişikliklerdir. Yani, problemin doğasındaki değişiklikler, Saccheri 'nin probleme matematiksel yaklaşımındaki değişikliklerle paralellik arzetmektedir. Saccheri 'nin teknikleri ve konuya bütünlükçü yaklaşımı, el-Tusi 'nin ve Wallis 'in tersine, ama Lambert 'inkine benzer biçimde "modern"dir.

Şimdi de üçüncü soruya, yani Saccheri 'nin çalışmasının paralellik probleminin çözümü yolunda diğer matematiksel yöntemlerin kullanılmasına, özellikle de analitik tekniklerin kullanımına yol açıp açmadığına, eğer açmışsa, bunu nasıl yaptığına dair soruya geçelim.

Gray 'in Euklidçi-olmayan geometrilerin tarihine ilişkin yaptığı çalışmalarda ifade ettiği gibi [(1979), (1987), (1989)], paralellik probleminin çözülmesindeki ve Euklidçi-olmayan geometrilerin keşfindeki en önemli basamak, analitik tekniklerin, özellikle de hiperbolik trigonometrinin ve sonra da diferansiyel tekniklerin kullanılmasıdır. Diferansiyel geometrinin kavramlarının kullanılmasına örtük olarak izin verdiği için, analizin kullanımı oldukça önemlidir.

Bilindiği gibi, Lambert, Euler 'in "sine" ve "cosine" üzerine olan çalışmalarını geliştirmiş ve hiperbolik fonksiyonlarla sirküler (circular) fonksiyonlar arasındaki benzerliği açık bir hale getirmiştir. Bu da, geometrinin bu alanında, F. K. Schweikart, F. A. Taurinus ve K. F. Gauss tarafından analizin ilk olarak kullanılmasına yol açmıştır. Lambert, küresel (spherical) trigonometri formüllerini hiperbolik fonksiyonlar içeren formüller biçiminde yazarak, hiperbolik ve sirküler fonksiyonlar arasındaki bağlantıyı belirgin kıldığında, bu yeni formüllerin HAA 'ya dayanan bir geometriye uygulanabilir bir şey olduğu sonucunu çıkarmamıştı; ki bu, sözü edilen yeni formüllerin bir eşkenar üçgenin özel durumunda değerlendirilmesiyle hemen ortaya çıkacak bir sonuçtur.[41]

Lambert bunu yapmak yerine, hiperbolik trigonometri formüllerini, üçgen kenarlarının hayali (imaginary) olarak ele alındığı astronomik çalışmalarında kullanmıştır. Ancak, ne tür bir üçgenin hiperbolik küresel trigonometri yasalarına uyduğu sorusunu kendine sormamıştır. Gray bu konuda şöyle yazmaktadır: "Bu olay birilerinin paralellik postulatıyla küresel trigonometri arasındaki ilişkiyi ortaya koyması için 60 yıl beklememize yol açacak bir ıskaydı. Bu ilişkiyi kuran da, Schweikart 'ın yeğeni ve onun gibi avukat olan F. A. Taurinus 'tur".[42]

Lambert bu çalışmayı 1766 'dan sonra, yani paralellik problemine olan ilgisini kaybettikten sonra yapmıştır. Fakat, kendisinin trigonometri üzerine ve hiperbolik fonksiyonlara dair yaptığı çalışmaların önemini yeterince kavrayamamıştı.[43]

Lambert 'in paralellik problemine olan ilgisi G. S. Klügel 'in **Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio** (1763) adlı tez çalışmasından gelmektedir. Lambert daha sonra 1766 yılında konuyla ilgili kendi araştırmalarını içeren **Theoria der Parallellienien** adlı bir kitap yazmıştır. Ancak bu kitap, yazarının ölümünden sonra J. Bernouilli ve C. F. Hindenburg tarafından 1786 'da yayınlanmıştır.

Saccheri 'nin çalışması, kendinden sonraki geometricileri, özellikle de Lambert 'i etkilemiştir.[44] Lambert 'in Saccheri 'nin çalışmasından haberdar olduğu kesindir, çünkü Saccheri 'nin çalışmasının bir özeti ve eleştirisi Klügel 'in tezinde verilmiştir. Lambert, kendi çalışması olan **Theorie der Paralellien** 'de Klügel 'in tezini anmış ve onu övmüş olmasına rağmen, ne Saccheri 'den ne de onun kitabından hiç bahsetmemiştir.[45]

Lambert sadece Saccheri 'nin üç hipotezin aynısıyle iş görmekle kalmamış, aynı zamanda bu hipotezlerle çalışırken Saccheri 'nin yönteminden de pek fazla ayrılmamıştır. Böylece, ilkin Saccheri tarafından kurulan paralellik teorisi ile bir üçgenin açılarının toplamı arasındaki temel bağlantı gündemde kalmıştır. Bu, paralellik probleminde ve Euklidçi-olmayan geometrilerin keşfinde trigonometrik tekniklerin kulanılmasına yol açan ilk basamak olarak değerlendirilebilir.

Buna ek olarak, Lambert, **Theoria der Paralellienen**'de çok önemli iki gözlem de yapmıştır:

> (i) HAA 'da bir doğru parçası, bir açıyla ilişkilendirilebilir ve böylece açıların mutlak ölçüsü uzunluklara trasfer edilebilir. Böylece bu yeni geometride uzunluk mutlak hale gelir. Euklid geometrisinde mutlak bir uzunluk ölçüsü yoktur. Euklidçi geometride benzer üçgenlerin varolmasından dolayı, açıların mutlak ölçülerini uzunluklara trasfer edemeyiz. Lambert bu yeni geometriyi elemek istemiştir, ancak bunu yapmamıştır.
>
> (ii) Bir düzlem üçgeninin alanı, ikinci ve üçüncü hipotezler çerçevesinde, üç açısının toplamıyla iki dik açının toplamı arasındaki farkla orantılıdır.

Böylece: k pozitif sabit olarak,

$$HAA\,'da\ \triangle\ =\ k(\pi - A - B - C),\ ve\ HOA\,'da\ da\ \triangle\ =\ k(A + B + C - \pi)\ 'dir.$$ [46]

Bonola 'nın doğru olarak ifade ettiği gibi, Saccheri, HAA 'yı tartışırken burada sözü edilen *farkla* (defect) karşılaşmış ve başka dörtgenlerden meydana gelen bir dörtgenin parçalarının *fark*ının toplamını kendisinin *fark*ı olarak sahip olduğuna (XXV. önerme) örtük olarak işaret etmiştir. Buna karşın, bundan alanın bu *fark*a orantılı olduğuna dair hiç bir sonuç çıkarmamıştır.[47]

IV. SONUÇ

Saccheri yalnızca belirli bir Euklidçi geometrik akılyürütme biçimini kullanmakla kalmamış, Euklidçi geometrinin temel kavramlarını da kullanmıştır. Dahası Saccheri, paralellik postulatının ve böylece de Euklid geometrisinin doğruluğuna inanmaktaydı. Euklid geometrisinin matematiksel olarak tek doğru ve olanaklı geometri olmasının yanında, fiziksel dünyamızın zorunlu tasarımı olduğunu da düşünüyordu. Yani, Saccheri, sadece Euklidçi geometrinin belirli bir akılyürütme biçimiyle ve onun temel kavramlarıyla değil, aynı zamanda Euklidçi geometrinin ideolojisi içinde de çalışmıştı. Bunun ise, o dönemde yeni bir geometrik yöntemin, yani Kartezyen dönemin mevcut olması olgusundan dolayı kaçınılmaz bir karar değil, bilinçli bir karar olduğu düşünülebilir. Bunun nedeni de, onun eski moda geometrik tarzdan hoşlanan bir Cizvit olması olabilir. Fakat yukarıda ifade edildiği gibi, Saccheri 'nin matematiksek yöntemi ve paralellik problemine yaklaşımı ile kendisinden önceki geometricilerinki arasında çok temel farklılıklar vardır. Onun problem üzerinde çalışması kendisinden öncekilerden görülebilir biçimde farklıdır.

Değinilen tüm farklılıklar ve Saccheri 'nin problem üzerinde yürüttüğü çalışmanın getirdiği yenilikler, *reductio ad absurdum* 'un kullanılmasından değil, bu eski Euklidçi akılyürütmenin yeni uygulama biçiminden ve problemi yeniden tanımlamada ve çözmede kullandığı Saccheri dörtgeninden gelmektedir. Problemi, daha önceki tanımlamalardan farklı olarak, dörtgenler, üçgenler ve açılar çerçevesinde tasarlayan Saccheri, paralellik kuramı ile bir üçgenin açılarının toplamı arasındaki temel bağlantıyı açığa çıkarmıştır. Bu, Saccheri 'nin probleme yaklaşımının heuristiğidir, yani, onun heuristiği, *reductio ad absurdum* 'un yeni bir uygulama biçiminden ve bu temel bağlantıdan meydana gelmektedir. Saccheri, böylelikle, Euklidçi "araştırma programı" (research programme)[48] içerisinde çalışmasına rağmen, paralellerin doğasına ilişkin yeni bir heuristik geliştirmiştir.

Saccheri 'nin bu çalışması, parallellik probleminin trigonometrik dildeki yeni formülasyonunun dile getirilmesinde, böylece de problemin çözümünde ve Euklidçi-olmayan geometrilerin keşfinde ilk basamak olarak değerlendirilebilir. Bu çalışma, öyleyse, Lakatos 'un terminolojisiyle, "ilerlemeci problem değişimi" 'ni (progressive problem shift)[49] yaratan bir çalışma olarak görülebilir.

Saccheri 'nin getirdiği bu yeni heuristik, daha sonraları HOA 'dan ve HAA 'dan yeni sonuçların çıkarılmasıyla ve paralellik postulatı ile küresel trigonometri arasındaki bağlantının keşfine çok yaklaşılmasıyla, Lambert ve Legendre tarafından geliştirilmiştir. Ancak bu bağlantı, açık olarak, Lambert 'in kitabını okumuş olan Gauss aracılığıyla Taurinus tarafından görülmüş ve ortaya konmuştur. Bu bağlantıya açıklık kazandırılmasıyla, Saccheri 'nin çalışmasında ortaya çıkan, sonra da Lambert tarafından geliştirilen bu yeni heuristik, uç noktasına Bolyai 'nin ve Lobachevsky 'nin çalışmalarıyla ulaşarak yeni bir bir biçime, yani yeni bir heuristiğe dönüşmüştür.

Saccheri 'nin çalışmasının ve genel olarak geometri tarihinin dikkat çekici yönleri, Saccheri 'nin paralellik problemine karşı geliştirdiği matematiksel yaklaşım biçiminde ve problemin doğasında yaptığı değişime özellikle dikkat edilerek, yani geometrinin tarihini ve teorilerini açıklama girişimi olan "heuristik" yaklaşımla su üzerine çıkarılmıştır. Geometrik kuramların heuristik yönleri üstüne olan tarihsel ve metodolojik çalışmalar, geometri tarihindeki sürekliliği ve ilerlemeyi gözler önüne serebilir. Benim, geometri tarihinin, geometri teorilerinin sonuçlarının çizgisel bir derlemesi olmadığı ve geometrik teorilerin tarihini en iyi anlama yolunun onların heuristiklerinin incelenmesinden geçtiğine dair olan iddiam tam da bu yüzden ileri sürülmüştür.

DİPNOTLAR

[41] Karş. Gray, not 6'daki aynı eser, sf.240 ve sf. 248.

[42] Gray, not 6'daki aynı eser, sf. 248; J. Gray: "The Discovery of Non-Euclidean Geometry", E. R. Philips 'in (ed.) **Studies in the History of Mathematics MAA Studies in Mathematics, 26**, 1987, 37-60; bkz. sf.47.

[43] Nedeni, Gray 'in belirttiği gibi, Euklidçi geometrinin metafiziksel ideolojisi içinde çalışmış olması olabilir.

[44] Karş. Segre, not 21'deki aynı eser, sf.535-547.

[45] Karş. Gray, not 6'daki aynı eser, sf.241; Dou, not 10'daki aynı eser, sf.396.

[46] Karş. Heath, not 14'deki aynı eser, sf.212-213; bkz. Gray, not 7'deki aynı eser, sf.74.

[47] Karş. Bonola, not 5'deki aynı eser, sf.46.

[48] Karş. I. Lakatos: "Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes", Chap. I, **Philosophical Papers**, Vol. I, J. Worrall & G. Currie (Eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

[49] Karş. Lakatos, not 48'deki aynı eser ve I. Lakatos: **Proofs and Refutations**, J. Worall & E. G. Zahar (Eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

—o—

OKURLARIMIZIN DİKKATİNE!!!
DÜZELTME

Geçen sayımızda, PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ bölümünde, aşağıdaki sayfa, sütun ve satır numaraları verilen baskı yanlışlıkları olmuştur; özür dileyerek düzeltiyoruz:

Sayfa	Sütun	Satır	Basılanı	Doğrusu
30	1	7	K^K	k^k
30	2	25	11...1995	11..995125
31	1	2	eşitsizliklerinden	eşitliklerinden
31	1	20	eşitsizliklerinden	eşitliklerinden
32	2	18	doğru	düzlem
32	2	19	doğrunun	düzlemin