HERON VE BRAHMAGUPTA FORMÜLLERİ

Fikri Gökdal
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Kenar uzunlukları bilinen bir üçgenin alanı, bu uzunluklar cinsinden ifade edilebilir mi?

Bu soru milattan önceki yıllarda ortaya atılmış, bazı kaynaklara göre Arşimet, bazı kaynaklara göre de Heron tarafından cevaplandırılmıştır. Heron, M.S.100 civarında İskenderiye'de yaşamış, mekanik ve geometri alanında önemli çalışmalar yapmış bir bilim adamıdır.

Kenar uzunlukları a, b, c olan bir üçgenin alanı S ve çevresi $2u$ ile gösterilmek üzere,

$$S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

olduğu yukarıda sözü edilen yıllarda ispatlanmıştır. "Heron formülü" adıyla bilinen bu formülde,

$$2u = a+b+c \ , \quad u = \frac{a+b+c}{2}$$

$$u-a = \frac{b+c-a}{2} \ , \quad u-b = \frac{a+c-b}{2} \ \text{ve}$$

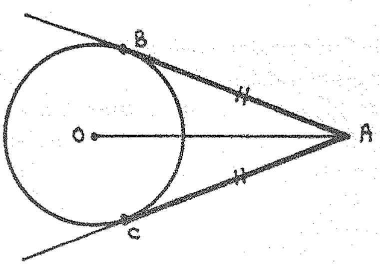
$$u-c = \frac{a+b-c}{2}$$

olduğundan çarpanların her biri ve dolayısıyla S, tamamen kenarlar cinsinden ifade edilen pozitif büyüklüklerdir.

Örnek: Bir üçgenin kenar uzunlukları 9, 10, 17 ise, alanı 36 'dır.

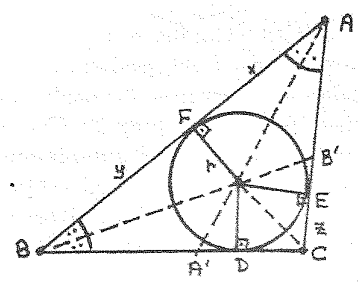
Bir üçgende üç iç açı ve her birine ait birer iç açıortay vardır. Bir açının açıortayı üzerindeki herhangi bir noktadan açının kenarlarına indirilen dikmelerin uzunlukları birbirine eşit olacağından, açıortay; açının kenarlarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeridir. Bir üçgenin herhangi iki(iç) açıortayının kesişim noktası I ile gösterilirse, bu I noktası üçüncü açının da iç açıortayı üzerinde bulunur ve dolayısıyla, üçgenin üç kenarından eşit uzaklıkta bulunur. I dan, kenarlara indirilen dikmelerin kenarları kestiği noktalar ya da I nın kenarlar üzerindeki dik izdüşüm noktaları (ya da dikme ayakları) merkezi I noktası ve üçgenin üç kenarına (dikme ayaklarında) teğet olan çemberin üzerinde bulunurlar. Bu çember yalnız bir tane olup bu çembere, " üçgenin iç teğet çemberi" bazen de kısaca "iç çember" denir. Bir çember ve bu çemberin dışında bulunan bir nokta verildiğinde, söz konusu noktadan geçerek çembere teğet olan iki farklı doğru vardır. Verilen nokta ile bu doğruların çemberlere değdiği noktalar arası uzaklık birbirine eşittir.

Şekil 1



"I merkezli ve r yarıçaplı çembere A,B,C noktalarından teğetler çizilmiş" gibi bakıldığında "Şekil 1" gibi üç kısımdan,

Şekil 2



$$|AF| = |AE|, \ |BF| = |BD|, \ |CD| = |CE|$$

olduğu görülür. Bu sayılar, ABC üçgeninin kenarları cinsinden şu biçimde ifade edilebilir: $|AF| = |AE| = x$, $|BF| = |BD| = y$, $|CD| = |CE| = z$ ve $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ ile gösterilmek üzere,

$$a = y+z, \ b = z+x, \ c = x+y$$

$$\Rightarrow a+b+c=2(x+y+z)$$
$$\Rightarrow 2u=2(x+y+z)$$
$$\Rightarrow u=x+y+z$$
$$\Rightarrow x=u-(y+z) \text{ ya da } x=u-a$$

ve benzer biçimde, $y = u-b$, $z = u-c$ 'dir. Geometrik karşılıkları yukarıdaki gibi belirlenen bu u, $u-a$, $u-b$, $u-c$ sayıları üçgenin alanını belirlemek için neden karekök içinde çarpılacaklar? Bundan sonraki satırlarda bunun ispatını vereceğiz.

Teorem. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları, a, b, c $(a+b+c=2u)$ ve alanı S ile gösterilmek üzere,

$$S=\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

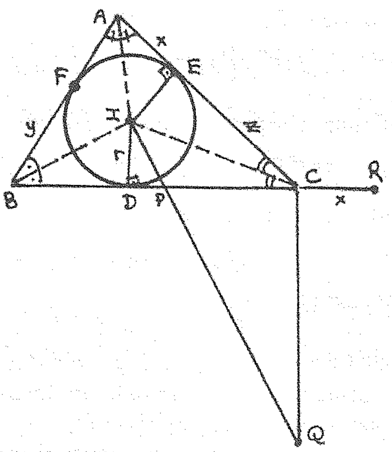
'dir.

İspat. ABC üçgeninin iç teğet çemberinin üçgenin kenarlarına değdiği noktalar; D, E, F olmak üzere

$$I\hat{D}C=I\hat{E}A=I\hat{F}B=90^0$$

'dir.

Şekil 3



BIC, CIA, AIB üçgenlerinin alanları sırasıyla S_1, S_2, S_3, ABC üçgenin alanı S ve iç yarıçapı r ile gösterildiğinde

$$|ID|=|IE|=|IF|=r,$$

$$S_1 = \frac{|BC|.|ID|}{2}=\frac{a.r}{2}$$
$$S_2 = \frac{|AC|.|IE|}{2}=\frac{b.r}{2}$$
$$S_3 = \frac{|AB|.|IF|}{2}=\frac{c.r}{2}$$

olacağından,

$$S=S_1+S_2+S_3=\frac{r}{2}(a+b+c)=\frac{r}{2}.2u$$

ve dolayısıyla ,

$$S=u.r \qquad (1)$$

bulunur. BI doğrusuna I noktasında dik olan doğru ile BC doğrusuna C noktasında dik olan doğrunun kesişim noktası Q, IQ doğrusu ile BC doğrusunun kesişim noktası P olsun. $[BC$ üzerinde $|CR|=|AE|=u-a$ şartını sağlayan (BCR sırasında) R noktası için,

$$\begin{aligned} |BR| &= |BC|+|CR| \\ &= a+(u-a) \\ &= u \end{aligned}$$

ve (1) 'den $S=ur$ olduğundan, $S=|BR|.|ID|$ yazılabilir. $B\hat{I}Q$ ve $B\hat{C}Q$ açıları, tanımları itibariyle dik açı olduklarından, $[BQ]$ (sabit) doğru parçası, I ve C noktalarından dik açı altında görülür. Buradan B, Q, C, I noktalarının $[BQ]$ çaplı çember üzerinde oldukları ya da $BQCI$ dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olduğu anlaşılır. Bu nedenle,

$$B\hat{Q}C+B\hat{I}C=180^0,$$

açıortayların kesişim noktası I, olduğundan $B\hat{I}C= 90^0+\frac{A}{2}$, $B\hat{Q}C= 90^0-\frac{A}{2}$, $B\hat{I}Q= 90^0$ ve $B\hat{I}C= 90^0+\frac{A}{2}$ olduğundan $Q\hat{I}C=\frac{A}{2}$, AIE üçgeninde $\hat{E}= 90^o$ ve $I\hat{A}E=\frac{A}{2}$ olduğundan, $A\hat{I}E= 90^o-\frac{A}{2}$ ve dolayısıyla, $B\hat{Q}C=A\hat{I}E$ elde edilir. Diğer taraftan, (BQCI) çemberinde QC yayını gören çevre açılar olduklarından, $Q\hat{B}C=Q\hat{I}C=\frac{A}{2}$ dir. QBC ve IAE üçgenlerinin ikişer açıları birbirine eşit olduğundan ($Q\hat{B}C=I\hat{A}E, \hat{C}=\hat{E}= 90^0$) bu üçgenler benzerdir.

$\overset{\triangle}{QBC}\sim\overset{\triangle}{IAE}$ (A.A) benzerliğinden,

$$\frac{|QB|}{|IA|}=\frac{|QC|}{|IE|}=\frac{|BC|}{|AE|} \qquad (2)$$

ve (2) 'de $|AE|=|CR|$ yazılarak

$$\frac{|QB|}{|IA|}=\frac{|QC|}{|IE|}=\frac{|BC|}{|CR|}=\frac{|QC|}{|ID|} \qquad (3)$$

$\overset{\triangle}{QCP} \sim \overset{\triangle}{IDP}$ (A.A) benzerliğinden de

$$\frac{|QC|}{|ID|} = \frac{|PC|}{|PD|}$$

elde edilir. (3) 'ten,

$$\frac{|BC|+|CR|}{|CR|} = \frac{|QC|+|ID|}{|ID|} \quad (5)$$

ve (4) 'ten,

$$\frac{|QC|+|ID|}{|ID|} = \frac{|PC|+|PD|}{|PD|} \quad (6)$$

(5) ve (6) 'dan ($|BC| + |CR| = |BR|$, $|PC| + |PD| = |DC|$)

$$\frac{|BR|}{|CR|} = \frac{|CD|}{|PD|} \quad (7)$$

bulunur. (7) 'nin 1.tarafı $\frac{|BR|}{|BR|}$ ile 2.tarafı da $\frac{|BD|}{|BD|}$ ile çarpıldığında;

$$\frac{|BR|^2}{|CR|.|BR|} = \frac{|CD|.|BD|}{|PD|.|BD|} \quad (8)$$

ve BIP dik üçgen, $|ID|$; $[BP]$ hipotenüsüne ait yükseklik, $[BD]$ ve $[DP]$ de bu yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalar olduğundan $|ID|^2 = |PD|.|BD|$ alınarak (8) eşitliğinden,

$$\frac{|BR|^2}{|CR|.|BR|} = \frac{|CD||BD|}{|ID^2|} \quad (9)$$

ya da

$$|BR|^2|ID|^2 = |BR|.|CR||CD||BD|$$

elde edilir. Bu çarpanların kenarlar cinsinden karşılıkları yazıldığında,

$$S^2 = u(u-a)(u-b)(u-c)$$

$$S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

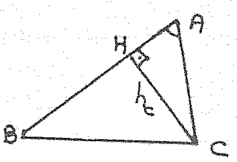
bulunur.

Bu teorem, h_a, h_b, h_c üçgenin yüksekliklerini göstermek üzere, yine

$$2S = a.h_a, 2S = b.h_b, 2S = c.h_c$$

eşitliklerinden herhangi biri, (mesela $2S = c.h_c$) temel alınarak, trigonometrik metotla ya da direkt hesaplama metoduyla ispatlanabilir:

Şekil 4



I. $2S = c.h_c$ ve şekilden, $h_c = b.\sin A$ yazılarak, $2S = bc\sin A$ bulunur. İki tarafın karesi alınıp,

$$4S^2 = b^2c^2\sin^2 A = b^2c^2(1-\cos^2 A)$$

ve üçgende kosinüs teoreminden de

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \rightarrow \cos^2 A = \frac{b^2+c^2-a^2{}^2}{4b^2c^2}$$

yazıldığında,

$$\begin{aligned} 4S^2 &= b^2c^2\left(1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\right) \\ &= \frac{b^2c^2((2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2)}{4b^2c^2} \text{ ve} \end{aligned}$$

$$4.4S^2 = (2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 \quad (I.1)$$

bulunur. Çarpanlara ayırma yoluyla

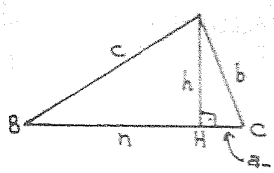
$$16S^2 = 2u.2(u-a)2(u-b)2(u-c)$$

ve buradan da, istenen

$$S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

elde edilir.

Şekil 5



II. (Şekil 4) 'te ; $|BC| = a$ 'dır. $|BH| = n$ alınırsa, $|HC| = a - n$ olur. $|AH| = h$ alınırsa, Pisagor bağıntısından

$$c^2 = h^2 + n^2 \quad \text{ve} \quad b^2 = h^2 + (a-n)^2 \qquad \text{(II.1)}$$

yazılır. Diğer taraftan, $a = n + (a-n)$ ve $a^2 = n^2 + 2n(a-n) + (a-n)^2$ 'dir. (II.1) eşitlikleri kullanılarak;

$$a^2 = c^2 - h^2 + 2\sqrt{c^2-h^2}\sqrt{b^2-h^2} + b^2 - h^2$$

$$\left(a^2 - c^2 - b^2 + 2h^2\right)^2 = 4(c^2-h^2)(b^2-h^2)$$

$$\left[(a^2 - b^2 - c^2) + 2h^2\right]^2 = 4(c^2-h^2)(b^2-h^2)$$

$$(a^2-b^2-c^2)^2 + 4h^2(a^2-b^2-c^2) + 4h^4$$

$$= 4(c^2b^2 - c^2h^2 - b^2h^2) + 4h^4$$

$$(a^2-b^2-c^2)^2 + 4h^2a^2 - 4h^2(b^2+c^2)$$

$$= 4c^2b^2 - 4h^2(b^2+c^2)$$

bulunur. Bu eşitlikte $2S = ah$ yazılarak; $\left(a^2-b^2-c^2\right)^2 + 4(2S)^2 = (2bc)^2$, buradan da,

$$16S^2 = (2bc) - (a^2-b^2-c^2)^2 \qquad \text{(II.2)}$$

elde edilir. (II.2) ile (I.1) ifadeleri aynı olduğundan sonuçta

$$S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

bulunur.

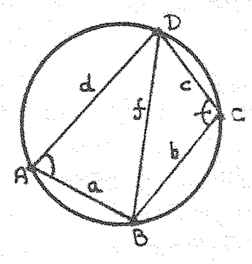
Kenar uzunlukları a, b, c, d olan bir dış bükey kirişler dörtgeninin alanının kenarlar cinsinden ifadesi, M.S. 7. yüzyılda yaşamış, Hintli matematikçi Brahmagupta tarafından keşfedilmiştir. Söz konusu dörtgenin alanı K ve $a+b+c+d = 2p$ ile gösterilmek üzere,

$$K = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

'dir.

İspat: $ABCD$ kirişler dörtgeninde, $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ olduğundan, $\sin A = \sin C$ ve $\cos A = -\cos C$ 'dir. ADB ve CDB üçgenlerinde $|BD| = f$ için kosinüs teoreminden

Şekil 6



$$\begin{aligned} f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos A, \\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos C \quad \text{ve} \\ &= b^2 + c^2 + 2bc\cos A \end{aligned}$$

yazılarak,

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = (2ad + 2bc)\cos A \qquad \text{(III.1)}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} K &= \text{Alan } A\overset{\triangle}{D}P + \text{Alan } C\overset{\triangle}{D}B \\ &= \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin C \\ &= \frac{1}{2}(ad+bc)\sin A \quad (\sin C = \sin A \ \text{ idi}), \end{aligned}$$

$$4K = (2ad + 2bc)\sin A \qquad \text{(III.2)}$$

bulunur. (III.1) ve (III.2) ifadelerinden, ($\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ eşitliği gözönüne alınarak)

$$\begin{aligned} (a^2+d^2-b^2-c^2)^2 &= (2ad+2bc)^2\cos^2 A \\ &= (2ad+2bc)^2(1-\sin^2 A) \\ &= (2ad+2bc)^2 - (2ad+2bc)^2\sin^2 A \\ &= (2ad+2bc)^2 - 16K^2, \end{aligned}$$

$$16K^2 = (2ad+2bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

ve buradan da, önceki satırlarda olduğu gibi çarpanlara ayırma yoluyla,

$$K = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Brahmagupta formülü elde edilir. Bu eşitlikte $d = 0$ alınırsa; kirişler dörtgeni, kenar uzunlukları a, b, c olan üçgene ve K da S 'ye dönüşür.

Kenar uzunlukları a, b, c, d olan bir dış bükey dörtgenin iç açılarından, karşılıklı bir çiftin toplamı 2α ile gösterilmek üzere (trigonometrik metotla, biraz zaman alacak işlemler sonucunda) alanının,

$$K^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\alpha$$

ile ifade edilebileceği gösterilir. ($\alpha = 90^o$ olması halinde bu ifadenin Brahmagupta formülüne dönüşeceği açıkça görülür.)

Kirişler dörtgeninin alanını veren $K = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ifadesine aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliği uygulanırsa;

$$[(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)]^{\frac{1}{4}}$$

$$\leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4}$$

$$\sqrt{K} \leq \frac{p}{2},$$

bulunur. $p-a=p-b=p-c=p-d$ ise, $\sqrt{K}=\frac{p}{2}$ elde edilir. Bu $a=b=c=d$ olmasını yani kirişler dörtgeninin bir kare olmasını gerektirir. Diğer hallerde $\sqrt{K} < \frac{p}{2}$ dir. O halde, çevresi sabit olan kirişler dörtgenleri arasında en büyük alana sahip olanı, karedir.

Brahmagupta formülünün uygulamasına bir örnek olmak üzere bir problem ve çözümünü sunuyoruz:

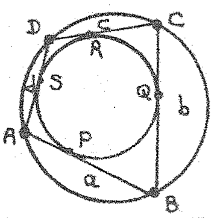
Problem: Kenar uzunlukları a, b, c, d ve alanı K olan bir dış bükey dörtgen, hem kirişler dörtgeni hem de teğetler dörtgeni ise, $K = \sqrt{abcd}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $ABCD$ dörtgeni, bir kirişler dörtgeni olduğundan

$$K^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

ve bu dörtgen aynı zamanda teğetler dörtgeni olduğundan, $a+c=b+d$ 'dir.

Şekil 7



$$\begin{aligned} 2p &= a+b+c+d \\ 2p &= 2(a+c) = 2(b+d) \\ p &= (a+c) = b+d \end{aligned}$$

'den; $p-a=c, p-c=a, p-b=d, p-d=b$ bulunur. Bunlar $K^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$ de yerlerine yazılarak,

$$K = \sqrt{abcd}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Kazarinoff, N.D., Geometrik Eşitsizlikler (Çeviren: A.Yüksel Özemre, Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı 13, İSTANBUL, 1963)

2. Demir, H., Euclid Geometrisi, Cilt I, ODTÜ Vakfı, 1987.

3. Eves, H., History of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1969.