BİR SABİT ELEMAN TEOREMİ

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü,
34459-İSTANBUL

Sabit nokta ya da sabit eleman kavramı varlığını sanırız çarpıcı olarak bize ilk kez Analiz ya da Genel Matamatik derslerinde gösterir: Bir $[a,b]$ kapalı ve sınırlı aralığında tanımlanan ve aynı aralıkta değerler alan sürekli bir f fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır; kısacası bu f fonksiyonu en az bir $x_0 \in [a,b]$ için $f(x_0) = x_0$ gerçeklemek zorundadır. Çünkü eğer, ne $f(a) = a$ ve ne de $f(b) = b$ gerçeklenmiyorsa, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında değer aldığından, kısacası her $x_0 \in [a,b]$ için $a \leq f(x) \leq b$ gerçeklendiğinden, zorunlu olarak hem $a < f(a)$ ve hem de $f(b) < b$ geçerli olmalıdır; bu ise $g(x) = f(x) - x$ sürekli fonksiyonunun $g(b) < 0 < g(a)$ eşitsizliklerini gerçeklemesi demektir. Ünlü **Ara Değer Teoremi** nedeniyle $[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve gerçel değerler alan g fonksiyonu, eriştiği herhangi iki gerçel sayı arasındaki tüm "ara değerleri" en az bir kez almak zorunda olduğundan, bu nedenle uygun bir $x_0 \in [a,b]$ için $0 = g(x_0) = f(x_0) - x_0$ ve sonuçta $f(x_0) = x_0$ olmalıdır. Aman dikkat, eğer sürekli f fonksiyonu (a,b) açık aralığında tanımlı ve aynı aralıkta değerler alan bir fonksiyon olsaydı, bu fonksiyonun bir sabit noktasının varlığı, ne yazık ki gerekmezdi. İşte iki yalın karşı örnek:

$$f\ ,\ g:\ (0,1) \to (0,1)$$

sürekli fonksiyonları sırasıyla

$$0 < x < 1 \quad \text{için} \quad f(x) = x^2\ ,\ g(x) = \sin x$$

biçiminde tanımlansınlar. Her ikisi de süreklidir (öyle değil mi sevgili okurlar), oysa hiç bir sabit noktaları yoktur. f fonksiyonu için bu iddia apaçıktır. g fonksiyonu içinse, herhangi bir $0 < x < 1$ için

$$0 < g(x) = x \cdot \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = x \cdot \cos \xi_x < x < 1$$

gerçeklendiğine dikkat etmek yeterlidir, çünkü uygun bir $0 < \xi_x < x$ yardımıyla, bunların ortalama değer teoremi nedeniyle yazılabildiği ve üstelik $0 < \xi_x < x < 1 < \frac{\pi}{2}$ nedeniyle $0 < \cos \xi_x < 1$ olduğu görülür.

Matematikte kendileri ve uygulamaları önemli olan pek çok sabit eleman teoremi vardır. Bugün bu kısa yazıda bunların birisinden söz edeceğiz. Küme ve fonksiyon tanımlarını biraz olsun bilmek anlatılanları kavramak için yeterlidir. Bilindiği gibi bir X kümesinin tüm altkümelerinin kümesi $P(X)$ ile gösterilir. İlgileneceğimiz sabit eleman teoremi aşağıdadır:

Knaster & Tarski Sabit Eleman Teoremi: Bir $\varphi : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu azalmayansa (yani $A \subseteq B \subseteq X$ için $\varphi(A) \subseteq \varphi(B) \subseteq X$ gerçekleşiyorsa), φ 'nin en az bir sabit elemanı vardır.

Kanıtlama: Her bir $A \in P(X)$ (yani $A \subseteq X$ altkümesi) için $\varphi(A) \subseteq X$ olmaktadır. Şimdi

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \subseteq \varphi(A)\}$$

altküme ailesini tanımlayalım. Elbette $\phi \subseteq \varphi(\phi)$ gerçeklendiğinden $\phi \in \mathcal{A}$ bulunur; demek ki $\mathcal{A}$ ailesi boş değildir, şaşırmayın lütfen, $\mathcal{A}$ ailesine ait olan en az bir "elemanın" varolduğunu göstermiş olduk. Şimdi bu ailenin üyelerinin birleşim kümesinin, yani

$$X_0 = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$$

altkümesinin

$$\varphi(X_0) = X_0 \qquad (*)$$

gerçeklediğini, başka bir deyimle φ fonksiyonunun bir sabit elemanı olduğunu göstermek istiyoruz. Bu ise güç değildir, çünkü bir yandan

$$\varphi(X_0) = \varphi(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \varphi(A)$$

olduğundan ve fakat her bir $A \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq \varphi(A)$ geçerli olduğundan sonuçta $X_0 \subseteq \varphi(X_0)$ bulunur, çünkü

$$X_0 = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \varphi(A) = \varphi(X_0)$$

geçerlidir; oysa φ fonksiyonu hipotez nedeniyle azalmayan olduğundan bu sonuç öncelikle

$$\varphi(X_0) \subseteq \varphi((\varphi(X_0))$$

ve dolayısıyla $\mathcal{A}$ ailesinin tanımı gereği $\varphi(X_0) \in \mathcal{A}$ ve sonuçta doğal olarak

$$\varphi(X_0) \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X_0$$

verecektir. Sonuçta yukarıda tanımlanan X_0 kümesi (*) koşulunu gerçekler.

Şimdi de bu sabit eleman teoreminden yararlanarak, çok ünlü bir sonucun gerçekten güzel ve değişik bir kanıtlamasını verelim dilerseniz:

Cantor & Bernstein Teoremi: X kümesinden Y kümesine bir bire-bir fonksiyon ve tersine Y kümesinden X kümesine bir bire-bir fonksiyon tanımlıysa X ve Y kümeleri eşkuvvettedir.

Kanıtlama: X ve Y kümeleri arasında bir **bire-bir ve örten** fonksiyonun tanımlı olduğunu göstereceğiz. Gerçekten hipotez nedeniyle, örten olmaları gerekmeyen

$$f : X \to Y \quad \text{ve} \quad g : Y \to X$$

bire-bir fonksiyonları tanımlı olduğundan, şimdi bunlar yardımıyla, her bir $A \subseteq X$ için

$$\varphi(A) = X - g(Y - f(A))$$

şeklinde bir

$$\varphi : P(X) \to P(X)$$

fonksiyonu tanımlayalım. $g(Y - f(A)) \subseteq X$ altkümesinin X 'deki tümleyen kümesine $\varphi(A)$ diyoruz ve böylelikle gerçekten φ fonksiyonu X in her altkümesine yine X de bir altküme eşleştirmektedir. Şu önemli ayrıntıya dikkat edelim. Yukarıdaki f ve g fonksiyonlarından **herhangi birisi** üstelik örten ise, X ve Y arasında bire-bir ve örten bir fonksiyon tanımlı olur, nasıl? Bu nedenle onların örten olmayan bire-bir fonksiyonlar olması durumunu irdeleyelim. φ fonksiyonu kolayca gözlemleyeceğimiz gibi azalmayandır, çünkü $A \subseteq B \subseteq X$ ise önce $f(A) \subseteq f(B) \subseteq Y$ ve sonra da sırasıyla

$$Y - f(B) \subseteq Y - f(A) \ ,$$

$$g(Y - f(B)) \subseteq g(Y - f(A)) \subseteq X$$

elde edileceğinden, tekrar X kümesinde tümleyen olarak

$$\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

bulunur, anımsadık değil mi? $A \subseteq B \subseteq X$ ve $X - B \subseteq X - A \subseteq X$ önermeleri birbirlerine eşdeğerdirler. O halde Knaster & Tarski Teoremi nedeniyle en az uygun bir $X_0 \subseteq X$ altkümesi için

$$X_0 = \varphi(X_0) = X - g(Y - f(X_0)) \ ,$$

$$X - X_0 = g(Y - f(X_0))$$

ve üstelik f fonksiyonu örten olmadığı için $X - X_0 \neq \phi$ gerçeklenir çünkü bu küme boş olsa,

$$\phi = g(Y - f(X_0))$$

ve zorunlu olarak, g altında görüntüsü alınan $Y - f(X_0)$ fark kümesi boş olurdu; bu ise

$$Y \subseteq f(X_0) \subseteq f(X) \subseteq Y$$

nedeniyle, f fonksiyonunun örten olduğunu söyleyen $Y = f(X)$ eşitliğini verirdi. Ne yazık ki şu uyarıyı yapma gereğini duyuyoruz: Bir $A - B$ fark kümesinin boş olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq B$ gerçeklenmesidir, pek çok öğrencinin düşündüğü gibi $A = B$ olması DEĞİL! İşte şimdi artık X ve Y kümeleri arasında aranan bir bire-bir ve örten fonksiyonu tanımlama zamanı geldi sevgili okurlar.

$$\forall x \in X \text{ için } h(x) = \begin{cases} f(x); & x \in X_0 \text{ ise} \\ g^{-1}(x); & x \in X - X_0 \text{ ise} \end{cases}$$

yazalım; dikkat edilirse herhangi bir $x \in X - X_0$ elemanı, bu fark kümesi, $Y - f(X_0)$ boş olmayan kümesinin g bire-bir fonksiyonu altındaki görüntüsü olduğundan, uygun ve tek türlü belirli bir $y_x \in Y - f(X_0)$ elemanının görüntüsü olup $g^{-1}(x) = y_x$ gerçeklenir. Kısacası öncelikle şunu gözlemiş oluyoruz: Her bir $x \in X$ için $h(x) \in Y$ olmaktadır ve sonuçta gönül rahatlığı ile

$$h : X \to Y$$

işaretini yazabiliriz. Üstelik g bire-bir olduğundan

$$g^{-1}(X - X_0) = g^{-1}g(Y - f(X_0)) = Y - f(X_0)$$

gerçeklendiğinden, sonuçta

$$\begin{aligned} h(X) &= h(X_0) \cup h(X - X_0) = f(X_0) \cup g^{-1}(X - X_0) \\ &= f(X_0) \cup (Y - f(X_0)) \\ &= Y \cup f(X_0) = Y \end{aligned}$$

elde edilir, çünkü apaçıktır ki $f(X_0) \subseteq Y$ nedeniyle son eşitlik geçerli olacaktır. Demek ki h fonksiyonu örtendir. "Peki ama, herhangi g fonksiyonu için $g^{-1}g(A) = A$ gerçeklenmez mi, neden bunu yazabilmek için g fonksiyonunun bire-bir olduğu özellikle vurgulandı yukarda? Gerekli mi bu bire-birlik koşulu gerçekten?" diye soranlarınızı duyar gibiyim, aman sevgili okurlar, bu önemli ayrıntılara dikkat edin, matematik, atılan her adımda titizlik ve özen gerektirir. Sözgelimi bire-bir olmadığı iyi bilinen $g(x) = \sin x$ için $A = \{0\}$ alınırsa,

$$g^{-1}g(A) = g^{-1}(0) = \{0,\ \mp\pi,\ \mp 2\pi,\ \mp 3\pi, ...\} \neq A$$

gerçeklendiğini gözlüyorsunuz değil mi? Evet, kanıtlamayı bitirelim artık, daha doğrusu h fonksiyonunun üstelik bire-bir olduğunu göstermeyi size bırakalım. Bu dergide geçen yıl yayımlanan **Bernstein'in Kanıtlaması** başlıklı yazıda tanımlanan fonksiyonun bire-bir olmasının kanıtını iyi öğrenen okurlar, kolaylıkla başaracaktır bunu. Evet biz, en güzel ve en yalın bir kanıtlamada

bile okurun kanıtlamaya katılmasını ve biraz olsun çaba göstermesini gerekli görüyoruz. İyi çalışmalar!

OKUYUCU MEKTUPLARI...

- **Ömer Parlu / FMV Özel Ayazağa Işık Lisesi, 80670-Maslak, İSTANBUL**

Ağağıdaki en küçüğü 6, en büyüğü 58 basamaklı 8 sayının özelliği: Sayıların sonunda bulunan rakam başa alınınca sayı o rakam katı kadar büyümektedir.

102564 ,
1012658227848 ,
105263157894736842 ,
1014492753623188405797 ,
1034482758620689655172413793 ,
1020408163265306122448979591836734693877755 ,
10112359550561797752808988764044943820224719 ,
1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966 .

Bu sayılarla ilgili bazı özellikler:

(a) Hepsi 10 ile başlamaktadır.
(b) Son rakamları 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 olarak yapılabilecek en küçük sayılar bunlardır.
(c) Bu sayıları defalarca yanyana yazarak elde edilebilecek yeni sayılar da yine bu özelliği sağlarlar.
