PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.176. Aşağıdaki denklemin pozitif tamsayılar kümesinde çözümü olmadığını gösteriniz:

$$m^m + n^n = K^K .$$

A.177. Aşağıdaki sayılardan hangisinin daha büyük olduğunu bulunuz:

$$a = 1999^{2.1999} \text{ ve } b = 1998^{2000}.2000^{1998} .$$

A.178. Bir sınıfta kız öğrenciler tüm öğrencilerin 0.44 'ünden az ve 0.43 'ünden fazla ise sınıfta en az kaç öğrenci olabilir?

A.179. Düzlem üzerinde uzunluğu 1 olan parça verilmiştir. Yalnız pergel ve cetvel kullanarak, uzunluğu $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ olan bir parça çiziniz.

A.180. Düzlemde bir d doğrusu ve bu doğru üzerinde sırasıyla A, B, C noktaları verildiğinde, d doğrusuna daima A noktasında teğet olan ve yarıçapı değişen çembere B ve C noktalarından çizilen teğetlerin kesişim noktası P ile gösterilmek üzere, P 'nin geometrik yeri nedir?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.176. $80 < 81$, $96 < 100$ ve $1000 < 1024$ eşitsizliklerini kullanarak $\log_{10} 2$ sayısının virgülden sonra ilk iki basamağını bulunuz.

Y.177. İki kişi ölçüleri 8×8 olan tahta levhanın hanelerini sıra ile boyuyorlar. Birinci oyuncu her hamlesinde 2 komşu haneyi siyaha boyuyor. İkinci oyuncu ise her hamlesinde keyfi bir haneyi beyaza boyuyor. Başlangıçta tüm haneler beyaz renktedirler. İkinci oyuncu öyle bir strateji uygulayabilir mi ki, onun her hamlesinden sonra levha üzerindeki herhangi 5×5 karesinin en az bir köşe hanesi beyaza boyanmış olsun? (Komşu haneler, ortak kenarı olan hanelerdir. Aynı bir hane oyun sürecinde bir kaç defa boyanabilir.)

Y.178. Alanı 1'e eşit olan dairenin içinde 1999 tane nokta, herhangi 3 nokta bir doğru üzerinde bulunmayacak biçimde işaretlenmiştir. İşaretlenmiş noktalar içinde öyle üçü vardır ki, köşeleri bu üç noktada bulunan üçgenin alanı

(a) 0,001999 'dan; (b) 0,0005 'den küçüktür; kanıtlayınız.

Y.179. x ve y reel sayılar olmak üzere, eğer

$$A = \{\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y) : n \in \mathbb{N}\}$$

kümesi sonlu küme ise bu takdirde x ve y sayılarının ikisi de rasyonel sayıdır; kanıtlayınız.

Y.180. $A_1A_2A_3$ ikizkenar olmayan bir üçgen, a_i, A_i 'nin karşısındaki kenar; M_i, a_i 'nin orta noktası; T_i, iç çemberin a_i kenarına değdiği nokta; S_i, T_i 'nin $\hat{A_i}$ 'nin iç açıortayına göre simetriği olan nokta olmak üzere M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 doğrularının aynı bir noktadan geçtiğini ispatlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.166. Rakamları içinde hiç sıfır bulunmayan ve kendi rakamları toplamına bölünen 100 basamaklı bir sayı bulunuz.

Çözüm. Son üç basamağı 125 olan her tamsayı 125 ile tam bölünür. Buna göre de rakamlar toplamı 125 'e eşit ve son üç basamağı 125 olan bir 100 basamaklı sayı oluşturmak yeter. Böyle bir sayıya örnek:

$$\underbrace{11\ldots1}_{94 \text{ tane}}995 .$$

(Son üç basamak olan 125 'in önündeki 97 tane rakamın yerini istediğiniz şekilde değiştirerek aynı özelliğe sahip farklı sayılar elde edebilirsiniz. Bu özelliğe sahip başka sayılar bulmaya çalışınız.)

A.167. Asal olduğu bilinen $2^{11213}-1$ sayısının onluk sayı sistemindeki yazılımında kaç rakam bulunduğunu belirleyiniz. (İpucu: $\log_{10} 2 = 0,30103\ldots$)

Çözüm. $2^{11213}-1$ sayısının rakamlar sayısı 2^{11213} 'ün rakamlar sayısına eşit olduğundan, bu sayının rakamlar sayısını bulalım. Eğer n doğal sayısı 10^x, ($x \in \mathbb{R}$) biçiminde gösterilmişse, x sayısının tam kısmı $[x]$ ile gösterilmek üzere,

$$10^{[x]} \le n < 10^{[x]+1}$$

olur ve bu eşitsizlikten, n 'nin rakamlar sayısının $[x]+1$ olduğu görülür.

Şimdi, $2^{11213} = 10^{11213.\log_{10} 2}$ ve $\log_{10} 2 =$

Şimdi, $2^{11213} = 10^{11213 . \log_{10} 2}$ ve $\log_{10} 2 = 0,30103...$ eşitsizliklerinden 2^{11213} 'ün rakamlar sayısının

$$[11213 . \log_{10} 2] + 1 = 3376$$

olduğunu söyleyebiliriz.

A.168. Aşağıdaki denklemin tüm gerçel çözümlerini bulunuz:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2-2x} = 1$$

Çözüm. $\sqrt{2x-1} = u$ ve $\sqrt[3]{2-2x} = v$ diyelim. Bu takdirde, verilen denklem

$$\begin{cases} u+v &= 1 \\ u^2 &= 2x-1 \\ v^3 &= 2-2x \end{cases}$$

sistemine, veyahut da

$$\begin{cases} u+v &= 1 \\ u^2+v^3 &= 1 \end{cases}$$

sistemine denk olur. Buradan, $v^3 + v^2 - 2v = 0$ denklemi elde edilir ki, bu denklemin çözümleri $v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = -2$ 'dir. $2 - 2x = v^3$ eşitsizliğinden x 'i buluruz. $x = 1, \frac{1}{2}, 5$.

A.169. Düzlem üzerinde rasgele 1998 tane nokta işaretlenmiştir. Bu noktaların tam 1001 tanesini içinde bulunduran bir dairenin varlığını kanıtlayınız.

Çözüm. Verilen noktaları doğru parçalarıyla ikişer-ikişer birleştirelim ve her parçanın ortasından o parçaya dik olan bir doğru çizelim. Elde edilen sonlu sayıda (en çok $\binom{1998}{2}$ tane) doğrudan hiçbirinin üzerinde olmayan bir P noktası alalım. Verilen 1998 nokta, P noktasından farklı uzaklıkta noktalardır. Bu uzaklıklar

$$r_1 < r_2 < ... < r_{1998}$$

gibi sıralanır ve $r_{1001} < r < r_{1002}$ olacak şekilde bir r sayısı seçilirse, P merkezli ve r yarıçaplı daire, verilen noktalardan tam 1001 tanesini içine alır.

A.170. Düzlem üzerinde rasgele 1998 tane nokta işaretlenmiştir. Düzlem üzerinde, bu noktaların tam 1001 tanesini "sağında" bulunduran bir doğrunun varolduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Verilen noktaları ikişer-ikişer birleştiren tüm doğruları düşünelim. (Bu doğrulardan bazıları üzerinde, verilen noktalardan 3 veya daha fazla nokta bulunabilir.) Şimdi, düzlemde, elde ettiğimiz sonlu sayıda (en fazla $\binom{1998}{2}$ tane) doğrunun hiç birine paralel olmayan bir doğru alalım. Düzlemde, bu doğruya paralel olan her doğru üzerinde, verilen noktalardan en fazla 1 tane bulunabilir. Sözü edilen doğru, düzlem üzerinde kendisine paralel olarak kaydırılarak, verilen noktalar birer-birer doğrunun bir tarafında bırakılaileceğinden, uygun bir doğru için, verilen noktaların 1001 tanesi (veya istenildiği kadar başka miktarı) doğrunun bir tarafında; geri kalanlar da diğer tarafında kalırlar.

Y.166. Herhangi bir $2k$ ($k \in N$) çift sayısı verilsin. Bu takdirde her m doğal sayısı için, m ile aralarında asal olan ve farkları $2k$ 'ya eşit olan sonsuz çoklukta doğal sayı ikililerinin bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Herhangi $2k, (k \in \mathbb{N})$ çift sayısı ve $m \in \mathbb{N}$ sayısı verilsin. m 'nin asal çarpanlara ayrılışı

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_s^{\alpha_s}$$

olsun. $f(x) = x(x+2k)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Önce, bazı tam x 'ler için q_i sayısının $x(x+2k)$ 'yi bölmediğini gösterelim. Gerçekten, eğer her tam x için $q_i | x(x+2k)$ sağlansaydı, $x = 1$ için $q_i | 2k+1$ ve $x = -1$ için $q_i | 2k-1$ olurdu ve buradan da

$$q_i | (2k+1) - (2k-1) = 2$$

elde edilirdi. Fakat, $q_i | 2k+1$ olduğundan sonuncu ifadeden $q_i = 1$ olması çıkar ki, bu bir çelişkidir. Böylece, $q_i \not| x_i(x_i + 2k) = f(x_i)$ sağlanacak biçimde x_i tamsayısı vardır. Çin Kalan Teoremine göre,

$$n \equiv x_i \ (mod\ q_i), \ (i = 1, 2, ..., s)$$

sağlanacak biçimde n sayısı vardır. Buradan

$$f(n) \equiv f(x_i) \not\equiv 0 \ (mod\ q_i), \ (i = 1, 2, ..., s)$$

elde edilir. Böylece, $(f(n), q_i) = 1$ eşitliği her $(i = 1, 2, \ldots, s)$ için sağlanacaktır. Sonuncudan ise $(f(n), m) = 1$), veyahut da $(n(n+2k), m) = 1$ olması çıkar. Yani n ve $n + 2k$ sayıları m ile aralarında asaldır. Şimdi, $a = n+2k$ ve $b = n$ dersek, $2k = a - b$ olur. Herhangi t doğal sayısı için

$2k = a - b = (a + tm) - (b + tm)$ eşitliğinden, problemde adı geçen ikililerin sonsuz çoklukta olduğunu söyleyebiliriz.

Y.167.

$$|\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin ax + \frac{1}{\sqrt{3}}.\sin bx + \frac{1}{\sqrt{6}}.\sin cx|$$

$$\geq \sqrt{1998}.|\sin x|$$

eşitsizliği her $x \in (0, 10^{-10})$ için sağlanırsa, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1998$ olacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Verilen eşitsizliğin her iki yanını $|x|$ 'e bölerek $x \to 0^+$ olmak üzere limite geçersek ve $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin Ax}{x} = A$ olduğunu gözönünde tutarsak,

$$|\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{3}}b + \frac{1}{\sqrt{6}}c| \geq \sqrt{1998}$$

olur. Cauchy-Bunyakowski-Schwartz eşitsizliğinden

$$\sqrt{1998} \leq |\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{3}}b + \frac{1}{\sqrt{6}}c|$$

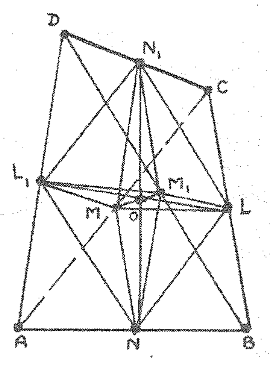
$$\leq (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6})^{1/2}.(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$$

elde ederiz ki bu da problemin iddiası ile denktir.

Y.168. $ABCD$ dörtyüzlüsünün çevrel küresinin merkezi O; BC, CA, AB kenarlarının orta noktaları L, M, N ve $AB + BC = AD + CD$, $BC + CA = BD + AD$, $CA + AB = CD + BD$ 'dir. $L\hat{O}M = M\hat{O}N = N\hat{O}L$ olduğunu ispat ediniz.

Çözüm.



$BC = AD$, $AB = CD$, $CA = BD$,

$$L_1M_1 \overset{//}{=} \frac{AB}{2} \overset{//}{=} ML\ ,$$

$$L_1M \overset{//}{=} \frac{DC}{2} \overset{//}{=} M_1L\ ;$$

L_1M_1LM düzlemsel ve $AB = CD$ olduğundan bir eşkenar dörtgendir. Benzer biçimde,

$$M_1N_1 \overset{//}{=} \frac{AB}{2} \overset{//}{=} MN\ ,$$

$$MN_1 \overset{//}{=} \frac{AD}{2} \overset{//}{=} NM_1\ ;$$

MNM_1N_1 düzlemsel ve $BC = AD$ olduğundan bir eşkenar dörtgendir. NLN_1L_1 de eşkenar dörtgendir.

Y.169. Uzayda 1998 tane nokta rasgele işaretlenmiştir. Bu noktaların tam 1001 tanesini içinde bulunduran bir yuvarın varlığını kanıtlayınız.

Çözüm. (A.169 'un çözümüne bakınız.) Verilen noktaları doğru parçalarıyla ikişer-ikişer birleştirelim ve her parçanın ortasından o parçaya dik olan bir doğru çizelim. Elde edilen sonlu sayıda doğrunun hiçbirinin üzerinde bulunmayan bir P noktası alalım. Verilen 1998 nokta, P noktasından farklı uzaklıkta noktalardır. Bu uzaklıklar

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_{1998}$$

gibi sıralanır ve $r_{1001} < r < r_{1002}$ olacak şekilde bir r sayısı seçilirse, P merkezli ve r yarıçaplı küre, verilen noktalardan tam 1001 tanesini içine alır. (Çözenler: *Alper Çay, Alp Şimşek.*)

Y.170. Uzayda 1998 tane nokta rasgele işaretlenmiştir. Bu noktalardan tam 1001 tanesini bir tarafında bulunduran bir düzlemin varlığını kanıtlayınız.

Çözüm. (A.170 'in çözümüne bakınız.) Verilen noktaları ikişer-ikişer birleştiren tüm doğruları düşünelim. Uzayda böylece elde ettiğimiz sonlu sayıda doğrudan hiçbirine paralel olmayan ve hiçbiri ile çakışmayan bir d doğrusu seçelim. d doğrusuna paralel olan düzlemler ailesini düşünürsek; bu düzlemlerden her biri, verilen noktalardan en çok bir tanesini üzerinde bulundurabilir. (Neden?) Bu gözlem sonucu, istenilen tür bir düzlemin bulunabileceği açıktır. (Çözen: *Alp Şimşek.*)