HARMONİK SERİDEN TERİMLERİN İŞARETLERİNİ DEĞİŞTİREREK ELDE EDİLEN SERİLER

Yusuf Ünlü
Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü, 01330-ADANA

1. Giriş

Hepinizin bildiği gibi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

harmonik serisi ıraksaktır. Bu serinin terimlerinin işaretleri değiştirilerek elde edilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

serisi ise yakınsaktır. Kuşkusuz işaret değiştirme işlemini pek çok değişik şekilde yapabiliriz. Bu yazımızda harmonik seriden işaret değiştirme işlemleri sonucu elde edilen bir takım serilerin yakınsaklığı incelenecektir. En genel olarak değiştirme işlemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Pozitif tamsayılardan oluşan bir $\{k_n\}$ dizisi için

$$\begin{aligned} K_0 &= 0 , \\ K_n &= k_1 + k_2 + \cdots + k_n \quad (\text{ her } n \geq 1 \text{ için}) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{K_1}}_{k_1 \text{ pozitif terim}} \underbrace{- \frac{1}{K_1+1} - \cdots - \frac{1}{K_2}}_{k_2 \text{ negatif terim}} + \underbrace{\frac{1}{K_2+1} + \cdots + \frac{1}{K_3}}_{k_3 \text{ pozitif terim}} - \cdots \tag{1}$$

koyalım. (1) serisi hangi koşullar altında yakınsak olur? Bu yazımızda

$$\lim_{n \to \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1 \ \ ve \ \ n \geq N \quad \text{için} \quad K_n^2 \geq K_{n-1} K_{n+1}$$

oluyorsa, (1) serisinin yakınsak olduğunu gösterecek ve buna ilişkin örnekler vereceğiz. Bunu kanıtlamak amacıyla bir takım yardımcı teoremlere gerek duyacağız.

Teorem 1.1. $0 \leq x$ için

$$\tfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{x}{1+x}) \tag{2}$$

'dir.

İspat. $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ koyalım.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0$$

bulunur. O halde f azalan değildir. $f(0) = 0$ olduğundan her $x \geq 0$ için $f(x) \geq 0$ olur. Benzer şekilde

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{x}{1+x}) - \ln(1+x)$$

koyalım.

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{(1+x)^2}) - \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{2(1+x)^2} \geq 0$$

bulunur. O halde g azalan değildir. $g(0) = 0$ olduğundan her $x \geq 0$ için $g(x) \geq 0$ olur. □

$$\begin{aligned} H_0 &= 0\,, \\ H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (\text{her } n \geq 1 \text{ için }) \end{aligned}$$

koyalım.

Teorem 1.2. n, m pozitif tamsayılar ve $m < n$ ise,

$$0 \leq \ln\frac{n}{m} - (H_n - H_m) \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})$$

'dir.

İspat. k bir pozitif bir tamsayı olmak üzere (2) de $x = \frac{1}{k}$ koyarak

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})$$

elde edilir. Buradan

$$0 \leq \ln(k+1) - \ln k - (H_{k+1} - H_k) \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

bulunur. Bu eşitsizliği $k = m$ den $k = n-1$ 'e kadar toplayarak

$$0 \leq \ln\frac{n}{m} - (H_n - H_m) \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{m} - \frac{1}{n})$$

bulunur.

2. Temel Sonuçlar

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ serisi pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri verilsin. N pozitif bir tamsayı olduğuna göre her $n \geq N$ için $|a_n - b_n| \leq c_n$ oluyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 'nin yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin yakınsak olması olduğu kolayca görülür.

$\{k_n\}$ dizisi pozitif tamsayılardan oluşan bir dizi olup $\{K_n\}$ dizisi tamsayılardan oluşan monoton artan bir dizidir. O halde $\lim_{n\to\infty} K_n = \infty$ olur. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{K_n} - \frac{1}{K_{n+1}})$$

serisi pozitif terimli yakınsak bir seridir.

Teorem 2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(H_{K_n} - H_{K_{n-1}})$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\frac{K_{n+1}}{K_n}$$

serisinin yakınsak olmasıdır.

İspat.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(H_{K_n} - H_{K_{n-1}}) = H_{K_1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(H_{K_{n+1}} - H_{K_n})$$

'dir. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerini $n \geq 1$ için

$$a_n = (-1)^{n-1}(H_{K_{n+1}} - H_{K_n}) \text{ ve } b_n = (-1)^{n-1}\ln\frac{K_{n+1}}{K_n}$$

olarak tanımlayalım. Teorem 1.2 'den dolayı $n \geq 1$ için

$$|a_n - b_n| = \ln\frac{K_{n+1}}{K_n} - (H_{K_{n+1}} - H_{K_n}) \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{K_n} - \frac{1}{K_{n+1}})$$

'dir. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin yakınsak olmasıdır. □

Şimdi girişte iddia edilen ana teoremi kanıtlayabiliriz. Önce şuna dikkat edelim: S_{K_n}, (1) serisinin K_n.kısmi toplamını göstermek üzere, $1 \leq n$ için

$$\begin{aligned} S_{K_n} &= (H_{K_1} - H_{K_0}) - (H_{K_2} - H_{K_1}) + \cdots + (-1)^{n-1}(H_{K_n} - H_{K_{n-1}}) \\ &= \sum_{n=1}^{n}(-1)^{n-1}(H_{K_n} - H_{K_{n-1}}) \end{aligned}$$

'dir.

Teorem 2.2. **(a)** (1) serisi yakınsak ise, $\lim_{n\to\infty}\frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ 'dir.

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ ve N pozitif bir tamsayı olduğuna göre her $n \geq N$ için $K_n^2 \geq K_{n-1}K_{n+1}$ ise, (1) serisi yakınsaktır.

İspat. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerini Teorem 2.1. 'deki gibi tanımlayalım. (1) serisi yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi de yakınsak olacağından $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\ln(\frac{K_{n+1}}{K_n}) = 0$ 'dır. Buradan $\lim_{n\to\infty}\frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ olduğu görülür. Şimdi $\lim_{n\to\infty}\frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ ve N pozitif bir tamsayı olduğuna göre her $n \geq N$ için $K_n^2 \geq K_{n-1}K_{n+1}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\frac{K_{n+1}}{K_n}$ serisi alterne seri testi nedeniyle yakınsak olur. Böylece K tamsayısı $n \geq N$ için $K_n \leq K < K_{n+1}$ ise,

$$\begin{aligned} |S_K - S_{K_n}| &= \frac{1}{K_n + 1} + \cdots + \frac{1}{K} = H_K - H_{K_n} \\ &\leq H_{K_{n+1}} - H_{K_n} \leq \ln\frac{K_{n+1}}{K_n} \end{aligned}$$

olup Teorem 2.1 'den (1) serisinin de yakınsak olduğu görülür. □

3. Uygulamalar

Uygulamalara geçmeden önce bir tanım verelim: P katsayıları gerçel sayılar olan bir polinom olduğuna göre $deg(P)$ ile P 'nin derecesini ve $ld(P)$ ile P 'nin en büyük dereceli teriminin katsayısını gösterelim.

Teorem 3.1. P katsayıları gerçel sayılar ve derecesi $k \geq 1$ olan herhangi bir polinom ve

$$\Delta_P(x) = P(x)^2 - P(x+1)P(x-1)$$

ise,

$$deg(\Delta_P) = 2k - 2 \quad \text{ve} \quad ld(\Delta_P) = k(ld(P))^2$$

'dir.

İspat. Teoremi tümevarım kullanarak kanıtlayalım.
k=1 : Bu durumda $P = Ax + C$ şeklindedir. O halde

$$\Delta_P(x) = P(x)^2 - (P(x) - A)(P(x) + A) = A^2$$

olur. Böylece teoremin $k = 1$ için doğru olduğu görülür.
$k > 1$: Teorem derecesi $< k$ olan bütün polinomlar için doğru olsun. Derecesi $k > 1$ olan bir P polinomu verilsin. Q derecesi $k-1$ olan bir polinom ve C bir gerçel sayı olmak üzere $P(x) = xQ(x)+C$ şeklindedir. Ayrıca $ld(P) = A$ ise, $ld(Q) = A$ 'dır. $G = Q(x)$, $E = Q(x+1)$, $F = Q(x-1)$ ve

$$L = 2CxG - C(x+1)E - C(x-1)F$$

koyalım. Dikkat edilecek olursa, L derecesi en fazla k olan bir polinomdur.

$$\begin{aligned}
\Delta_P(x) &= (xG + C)^2 - ((x+1)E + C)((x-1)F + C) \\
&= x^2G^2 - (x^2-1)EF + L \\
&= x^2(G^2 - EF) + EF + L \\
&= x^2\Delta_Q(x) + EF + L \ .
\end{aligned}$$

EF 'nin derecesi $2k - 2$ ve $ld(EF) = A^2$ 'dir. Tümevarım varsayımı gereğince

$$deg(x^2\Delta_Q) = 2k - 2 \quad \text{ve} \quad ld(x^2\Delta_Q) = (k-1)A^2$$

'dir. O halde

$$deg(\Delta_P) = 2k - 2 \quad \text{ve} \quad ld(\Delta_P) = (k-1)A^2 + A^2 = kA^2$$

olur. □

Teorem 3.2. P ve Q katsayıları gerçel sayılar olan polinomlar, $deg(P) = k$ ve $deg(Q) = s$ olsun. $k \geq 1$ ve $s < 2k - 2$ ise, bir pozitif N tamsayısı için $n \geq N$ ise $\Delta_P(n) \geq Q(n)$ 'dir.

İspat. $A = ld(P)$ ve $L(x) = \Delta_P(x) - Q(x)$ ise, $s < 2k - 2$ olduğundan L polinomu derecesi $2k - 2$ olan $L(x) = kA^2x^{2k-2} + \cdots$ şeklinde bir polinomdur. O halde

$$\lim_{n \to \infty} L(n) = \infty$$

olup, bir pozitif N tamsayısı için $n \geq N$ ise, $\Delta_P(n) \geq Q(n)$ 'dir.

Örnek 1. $k_n = 2^n$ ise, $K_n = 2(2^n - 1)$ 'dir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n - 1} = 2$$

olup (1) yakınsak değildir.

Örnek 2. P katsayıları tamsayılar ve $deg(P) = k \geq 2$ olan bir polinom olsun. P 'nin $n \geq 1$ için monoton arttığını ve $0 < P(1)$ olduğunu varsayalım. O zaman $L = P(1)$ olduğuna göre $[L, \infty]$ aralığında tanımlı P 'nin ters fonksiyonu g yine monoton artandır.

$$-\sum_{n=L}^{\infty} \frac{(-1)^{[g(n)]}}{n} \tag{3}$$

serisini ele alalım. $r = [g(n)]$ ise

$$r \leq g(n) < r + 1$$

olup P monoton arttığından

$$P(r) \leq n < P(r+1)$$

elde edilir. Şimdi

$$k_r = P(r+1) - P(r) > 0$$

dizisini ele alalım. Bu diziye karşılık gelen (1) serisi ile (3) serisi aynı serilerdir.

$$\begin{aligned} K_n &= k_1 + k_2 + \cdots + k_n \\ &= P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + \cdots + P(n+1) - P(n) \\ &= P(n+1) - P(1) \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 3.2 'de $Q(x) = -P(1)(P(x) + P(x+2) - 2P(x+1)) + P(1)^2$ alınacak olursa, $deg(Q) \leq k - 1 < 2k - 2$ olup

$$\begin{aligned} K_n^2 - K_{n-1}K_{n+1} &= (P(n+1) - P(1))^2 - (P(n) - P(1))(P(n+2) - P(1)) \\ &= \Delta_P(n+1) + P(1)(P(n) + P(n+2) - 2P(n+1)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(n+1) - P(1)}{P(n) - P(1)} = 1$$

'dir. Dolayısıyla (3) serisi yakınsaktır.

Örnek 3. $p \geq 2$ bir pozitif tamsayı ise, Örnek 2 'de, $P(x) = x^p$ alınırsa $g(x) = \sqrt[p]{x}$ olur. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[p]{n}]}}{n}$ serisi yakınsaktır.

Örnek 4. Q katsayıları tamsayılar olan bir polinom olsun. Her pozitif n tamsayısı için $Q(n)$ 'nin bir pozitif tamsayı olduğunu varsayalım. $k_n = Q(n)$ alınarak elde edilen (1) serisi yakınsaktır. Çünkü Q polinomu k. dereceden bir polinom ise, derecesi $k + 1 \geq 1$ olan bir P polinomu için

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} Q(i) = K_n$$

olur. Teorem 3.1. 'den dolayı $K_n^2 - K_{n-1}K_{n+1} = \Delta_P(n) \geq 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$$

'dir. Örneğin $Q(x) = x$ ve $k_n = Q(n)$ alınarak elde edilen

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{1 \text{ pozitif terim}} - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{2 \text{ negatif terim}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}}_{3 \text{ pozitif terim}} - \cdots$$

serisi yakınsaktır.

Örnek 5. $n \geq 1$ için

$$k_1 = 4, \quad k_{2n} = 3, \quad k_{2n+1} = 1$$

koyalım. Buradan

$$K_{2n-1} = 4n \text{ ve } K_{2n} = 4n+3$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n} &= \ln \frac{K_2}{K_1} - \ln \frac{K_3}{K_2} + \cdots + \ln \frac{K_{2m}}{K_{2m-1}} - \ln \frac{K_{2m+1}}{K_{2m}} \\
&= \ln \frac{K_2^2}{K_1 K_3} + \cdots + \ln \frac{K_{2m}^2}{K_{2m-1}K_{2m+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{m} \ln \frac{K_{2n}^2}{K_{2n-1}K_{2n+1}}
\end{aligned}$$

'dir.

$$\begin{aligned}
\frac{K_{2n}^2}{K_{2n-1}K_{2n+1}} &= \frac{(4n+3)^2}{16n(n+1)} = \frac{16n^2+24n+9}{16n(n+1)} \\
&> \frac{16n^2+16n+8n}{16n(n+1)} > 1 + \frac{1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

'dir. Teorem 1.1. 'den dolayı $x = \frac{1}{2(k+1)}$ için

$$\sum_{k=1}^{m} \ln \frac{K_{2n}^2}{K_{2n-1}K_{2n+1}} > \sum_{n=1}^{m} \ln\left(1 + \frac{1}{2(n+1)}\right) > \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n+3}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n}$$

serisi ıraksaktır. O halde (1) serisinin yakınsak olması için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ olması yeterli değildir.