PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.171. Aşağıdaki sayılardan hangisi daha büyüktür?

$$(123456789!)^2 \text{ ya da } 123456789^{123456789}$$

A.172. Ardışık 10 tamsayıdan en az biri geri kalan dokuz sayı ile aralarında asaldır; gösteriniz.

A.173. Çarpımları 1 'e eşit olan üç tane pozitif sayının toplamı bu sayıların terslerinin toplamından büyük ise, bu takdirde söz konusu sayılardan tam bir tanesinin 1 'den büyük olacağını gösteriniz.

A.174. $a \in \mathbb{R}$ sayısı $a^5 - a^3 + a = 2$ denklemini sağlıyorsa, $3 < a^6 < 4$ olduğunu gösteriniz.

A.175. 20×25 dikdörtgeninin içine, kenar uzunluğu 1 olan 120 tane kare atılmıştır. Dikdörtgenin içine, çapı 1 olan ve 120 karenin hiç birini kesmeyen bir daireyi yerleştirmenin mümkün olduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.171. $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{2665.2666}$ ve $B = \frac{1}{1334.2666} + \frac{1}{1335.2665} + \cdots + \frac{1}{2666.1334}$ sayıları veriliyor. $\frac{A}{B}$ 'nin bir tamsayı olduğunu gösteriniz.

Y.172. $a_1, a_2, \cdots, a_n$; n tane farklı pozitif sayı olsun (tam olmaları gerekmez). Bu sayılar yardımıyla elde edilen tüm mümkün toplamlar kümesini düşünelim (sayıların kendisini de söz konusu kümeye dahil ediyoruz). Elde edilen toplamlar içerisinde, en azından, $\frac{n(n+1)}{2}$ tane farklı sayı bulunacağını kanıtlayınız.

Tam $\frac{n(n+1)}{2}$ tane farklı sayının bulunacağı duruma bir örnek gösteriniz.

Y.173. Bir doğru üzerinde 50 parça verilmiştir. Aşağıdaki önermelerden en az birinin doğru olduğunu kanıtlayınız:

(a) Parçalardan en az 8 tanesinin ortak noktası vardır.

(b) Öyle 8 parça vardır ki, herhangi ikisinin orta noktası yoktur.

Y.174. Konveks $ABCDEF$ altıgeni verilmiştir. AD, BE ve CF köşegenlerinin her birinin altıgenin alanını yarıya böldüğü bilinmektedir. Bu köşegenlerin aynı bir noktada kesiştiklerini kanıtlayınız.

Y.175. Düzlemi bir kaç bölgeye bölen n $(n \geq 2)$ tane doğru çizilmiş ve bu bölgelerin bazıları boyanmıştır. Boyama işlemi öyle yapılmıştır ki, boyanmış bölgelerin ortak sınırı yoktur (sınırlar doğru parçalarıdır). Boyanmış bölgeler sayısının $\frac{1}{3}(n^2 + n)$ 'den fazla olamayacağını kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.161. m ve n doğal sayılar olmak üzere, $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ 'dir. $\frac{m}{n} < \sqrt{2}(1 - \frac{1}{4n^2})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$m < \sqrt{2}.n \Rightarrow m^2 < 2n^2 \Rightarrow m^2 + 1 \leq 2n^2$$

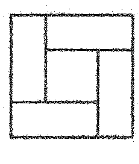
$$\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n^2} = 2(1 - \frac{1}{2n^2})$$

$$= 2[1 - 2\frac{1}{4n^2} + (\frac{1}{4n^2})^2 - (\frac{1}{4n^2})^2]$$

$$< 2.(1 - \frac{1}{4n^2})^2 \Rightarrow$$

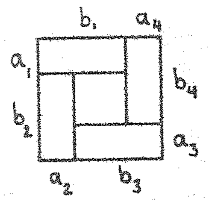
$$\frac{m}{n} < \sqrt{2}(1 - \frac{1}{4n^2}).$$

A.162. Bir kare, şekilde görüldüğü gibi beş dikdörtgene bölünmüştür. Karenin kenarları ile ortak noktaları olan dört dikdörtgenin alanları birbirine eşitse, tam ortadaki dikdörtgenin bir kare olduğunu gösteriniz.



Çözüm. Dikdörtgenlerin kenar uzunluklarına a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 diyelim (şekile bakınız).

Varsayalım ki, $a_1 > a_2$ 'dir. O halde $a_1 + b_2 = a_2 + b_3$ eşitliğinden $b_3 > b_2$ olur. Alanların eşitliğinden ve $b_3 > b_2$ olmasından $a_3 < a_2$ olması çıkar. Bu şekilde devam edersek, $a_3 > a_4$ ve nihayet $a_4 > a_1$ elde ederiz. Böylece,



$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_1$ çelişkisini elde etmiş oluruz. Demek ki, $a_1 = a_2$ olmalıdır. Benzer şekilde $a_2 = a_3 = a_4$ ve dolayısıyla, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ olduğunu göstermek mümkündür. Problemin iddiası bu eşitliklerin basit sonucudur.

A.163. 6 tane ikinci derece denklem veriliyor: $x^2 + p_k x + q_k = 0$, $k = 1, 2, \cdots, 6$. p_k 'ların hepsinin farklı sayılar olduğu, her denklemin iki ayrı kökü olduğu ve farklı köklerin toplam sayısının 4 olduğu biliniyorsa, bu 4 kökün toplamı neye eşittir?

Çözüm. x_1, x_2, x_3 ve x_4 verilen 6 denklemin farklı kökleri olsun. Bu dört sayıdan oluşturulmuş farklı (x_i, x_j), $(i < j)$ ikililer sayısı $\binom{4}{2} = 6$ ve denklemler sayısı da 6 olduğundan her (x_i, x_j), $(i < j)$ ikilisine sadece bir tane p_k sayısı uygun geliyor. O halde Vieta Teoremine göre,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3)$$

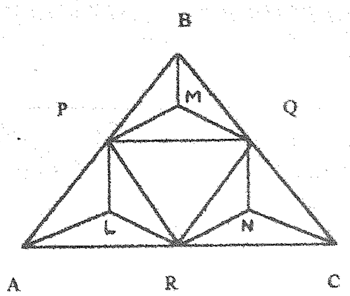
$$+ (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3)$$

$$+ (x_2 + x_4) + (x_3 + x_4)]$$

$$= -\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) .$$

A.164. Dar açılı bir üçgenin her kenarının orta noktasından diğer kenara dikler çizilmiştir. Bu diklerin sınırladığı altıgenin alanının, üçgenin alanının yarısına eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.



P, Q, R; $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenarlarının orta noktaları olsunlar (şekile bakın). $\overset{\triangle}{APR}$, $\overset{\triangle}{RQC}$ ve $\overset{\triangle}{PBQ}$ üçgenleri dar açılı olduklarından onların yüksekliklerinin kesişim noktaları olan L, N, M bu üçgenlerin içinde bulunacaklardır.

$\overset{\triangle}{ABC}$ 'nin alanına S ve $PLRNQMP$ altıgeninin alanına da $\tilde{S}$ dersek,

$$\tilde{S} = A(\overset{\triangle}{PQR}) + A(\overset{\triangle}{PMQ}) + A(\overset{\triangle}{QNR}) + A(\overset{\triangle}{RLP}),$$

$$\overset{\triangle}{APR} = \overset{\triangle}{RQC} = \overset{\triangle}{PBQ}$$

olduğundan,

$$\overset{\triangle}{PMQ} = \overset{\triangle}{ALR} \text{ ve } \overset{\triangle}{QNR} = \overset{\triangle}{PLA}$$

'dır. Dolayısıyla,

$$A(\overset{\triangle}{PMQ}) + A(\overset{\triangle}{QNR}) + A(\overset{\triangle}{RLP})$$

$$= A(\overset{\triangle}{ALR}) + A(\overset{\triangle}{PLA}) + A(\overset{\triangle}{RLP})$$

$$= A(\overset{\triangle}{APR}) = \frac{1}{4}.S .$$

Böylece,

$$\tilde{S} = \frac{1}{4}.S + \frac{1}{4}.S = \frac{1}{2}.S \text{ 'dir.}$$

A.165. Yazı tahtasında $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{12}$ sayıları yazılmıştır.

(a) Bu sayıların önünde + veya − işaretleri koymakla sıfır elde etmek mümkün müdür?

(b) Eğer mümkün değilse, sayılardan en az kaç tanesini sildikten sonra geriye kalanların önüne

+ ve − işaretleri koymakla sıfır elde etmek mümkündür?

Çözüm. (a) Mümkün değil. Çünkü karşılarında + ve/veya − işaretlerinden biri yazılmış kesirleri uygun şekilde toplamakla

$$\frac{k}{5.8.9.11} \mp \frac{1}{7}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

elde edilir ki, bunun hiç bir zaman sıfıra eşit olamayacağı açıktır.

(b) Böylece, $\frac{1}{7}$ 'yi silmek lazım olduğu (a) şıkkından görülüyor. Benzer fikirler $\frac{1}{11}$ 'in de silinmesi gerektiğini gösterir. Geriye kalan sayıların ($\frac{1}{9}$ 'dan başka) önünde $\mp$ işaretlerinden birini yazarak

$$\frac{l}{3.5.8} \mp \frac{1}{9} = \frac{3l \mp 8.5}{5.8.9}$$

biçiminde bir ifade elde ederiz.

Paydaki birinci toplanan 3 ile bölünüyor, ama diğer toplanan (40) ise bölünmüyor. Dolayısıyla bu ifade sıfıra eşit olamaz. Böylece, $\frac{1}{9}$ 'u da siliyoruz. Geriye kalan sayıların önüne + veya − yazarak

$$\frac{m}{8.3} \mp \frac{1}{5} \mp \frac{1}{10}$$

elde ediyoruz. (Burada birinci toplanan, önlerinde + veya − yazılmış 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ sayılarının toplamıdır.) Yukarıdaki toplamı şu şekilde yazalım:

$$\frac{5m \mp (\mp 2 \mp 1).12}{8.3.5} .$$

Paydaki ikinci toplanan 5 ile bölünmediğinden bu toplam sıfıra eşit olamaz. Böylece, $\frac{1}{5}$ ve $\frac{1}{10}$ 'dan en az birini ve dolayısıyla, ikisini de silmek gerekecektir. Benzer fikirler kullanılarak $\frac{1}{8}$ 'in de silinmesi gerektiği sonucuna varılır. Geriye kalan 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ sayıları karşısında + ve − işaretleri koymakla sıfır elde etmek mümkündür:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = 0 .$$

Y.161 (Sorunun yazımında hata olmuştur: doğrusu:) $q > 5$ olmak üzere p ve q asal sayıları $q|(2^p + 3^p)$ koşulunu sağlarsa, $q > p$ olacağını gösteriniz.

Çözüm. Bir q için $q|(2^p + 3^p)$ sağlanırsa $q|(3^{2p} - 2^{2p})$ de sağlanır. Verilen $q > 5$ için $q|(3^m - 2^m)$ koşulunu sağlayan m doğal sayılarının kümesi A olsun. Böylece, 6 ile aralarında asal olan her q için $\varphi(q) \in A$ 'dır. Burada $\varphi(q) = q-1$, Euler φ-fonksiyonunun q asalındaki değeridir. Diğer yandan $q > 5$ olduğundan $m = 2$ çözüm değildir; $m = 1$ de çözüm değildir. Dolayısıyla, A 'nın en küçük elemanı n ile gösterilirse, $n \geq 3$ 'tür. Şimdi, $a \in A$ olsun. Bölme algoritması ile

$$a = n.b + k, \ 0 \leq k < n$$

alırsak;

$$\begin{aligned} 3^q \equiv 2^q \pmod q \quad &\Rightarrow \quad 3^{nb}.3^k \equiv 2^{nb}.2^k (\text{mod q}) \\ &\Rightarrow \quad 3^k \equiv 2^k (\text{mod q}) \\ &\Rightarrow \quad k = 0 \Rightarrow n|a. \end{aligned}$$

Yukarıda, $2p \in A$ ve $q - 1 \in A$ olduğunu görmüştük. O halde, $n|2p$ ve $n|(q-1)$. Böylece,

$$\text{OBEB}(q-1, 2p) = n \geq 3$$
$$\Rightarrow \text{OBEB}(q-1, p) > 1 \Rightarrow \text{OBEB}(q-1, p) = p.$$

Sonuç olarak $p|(q-1) \Rightarrow p \leq q - 1 \Rightarrow p < q$.

(Çözenler: *Kazım Büyükboduk.*)

Y.162. Bir üçgenin kenar uzunlukları a, b, c; çevrel çemberinin yarıçapı R ise,

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq 3\sqrt{3}R$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı r, alanı S ve $u = \frac{a+b+c}{2}$ olsun. Bu takdirde, $S = ur = \frac{abc}{4R}$ ve $\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = ur$ (Heron Formülü) olduğu bilinmektedir.

Bunlardan

$$(u-a)(u-b)(u-c) = ur^2 \qquad (*)$$

ve

$$abc = 4Rru \qquad (**)$$

olduğu görülür. Problemin çözümü için önce aşağıdaki lemmayı kanıtlayacağız:

Lemma.

$$\frac{a^2}{u-a} + \frac{b^2}{u-b} + \frac{c^2}{u-c} = \frac{4u(R-r)}{r}$$

Lemmanın kanıtı. Yukarıdaki (∗) ve (∗∗) eşitlikleri kullanılarak

$$u^3 + ur^2 + 4Rru = u^3 + (u-a)(u-b)(u-c) + 4Rru$$

$$= u^3+u^3-u^2(a+b+c)+u(ab+ac+bc)-abc+abc$$
$$= 2u^3-2u^3+u(ab+ac+bc)=u(ab+ac+bc).$$

Buradan,

$$u^2+r^2+4Rr=ab+ac+bc \qquad (***)$$

elde edilir. Şimdi,

$$\frac{a^2}{u-a}=\frac{a(u-(u-a))}{u-a}=\frac{au}{u-a}-a$$

ve benzer biçimde,

$$\frac{b^2}{u-b}=\frac{bu}{u-b}-b\,;\ \frac{c^2}{u-c}=\frac{cu}{u-c}-c$$

olduğuna dikkat edersek

$$\frac{a^2}{u-a}+\frac{b^2}{u-b}+\frac{c^2}{u-c}$$
$$=\frac{au}{u-a}+\frac{bu}{u-b}+\frac{cu}{u-c}-(a+b+c)$$
$$=u(\frac{a}{u-a}+\frac{b}{u-b}+\frac{c}{u-c}-2).$$

Son ifadede paydalar eşitlenip $(*)$, $(**)$ ve $(***)$ kullanılarak

$$\frac{a^2}{u-a}+\frac{b^2}{u-b}+\frac{c^2}{u-c}=\frac{4u(R-r)}{r}$$

elde edilir ve lemmanın kanıtı tamamlanmış olur.

Problemdeki eşitsizliği kanıtlamak için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc} &\Rightarrow 8u^3\geq 27abc\\ &\Rightarrow 8u^3\geq 27.4.R.r.u\\ &\quad (\ (**)\text{'dan})\\ &\Rightarrow 2u^2\geq 27Rr\\ &\Rightarrow u^2\geq \frac{27}{2}R.r \end{aligned}$$

$R\geq 2r$ (Euler Eşitsizliği) olduğundan

$$u^2\geq\frac{27}{2}Rr\geq 27r^2\Rightarrow u\geq 3\sqrt{3}r$$

ve buradan, $R\geq 2r$ olduğu tekrar kullanılarak

$$2u(R-r)\geq 2.3\sqrt{3}r(R-r)\geq 3\sqrt{3}Rr$$

elde edilir. Son olarak, kanıtlanmış olan lemma kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{u-a}+\frac{b^2}{u-b}+\frac{c^2}{u-c} &= \frac{4u(R-r)}{r}\\ &\geq \frac{4.3\sqrt{3}Rr}{r}, \end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{a+c-b}+\frac{c^2}{a+b-c} &\geq 2.3\sqrt{3}Rr\\ &> 3\sqrt{3}Rr\,. \end{aligned}$$

(Çözenler : *M. Bumin Yenmez.*)

Y.163. Merkezi $(0,1)$ noktasında bulunan bir çember $y=x^2$ parabolünü 4 ayrı noktada kesiyor: A, B, C, D.

(**a**) $A(ABCD)<\sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz.

(**b**) $A(ABCD)$ alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm. (**a**) Simetriden dolayı $ABCD$ ikizkenar yamuk olacaktır. Çemberin yarıçapına R dersek, yamuğun köşelerinin koordinatları $\left\{\begin{array}{l} y=x^2\\ x^2+(y-1)^2=R^2 \end{array}\right\}$ denklem sistemini sağlayacaktır. Buradan y için

$$y^2-y+1-R^2=0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri $y_1+y_2=1$ eşitliğini sağlıyor (Vieta Teoreminden). Öyleyse, yamuğun orta tabanı $y=\frac{1}{2}$ doğrusu üzerinde bulunacaktır. Orta tabana MN dersek ve $x^2=y$ eşitliğini gözönüne alırsak,

$$|MN|<2.\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

olur. Öte yandan, yamuğun yüksekliği $|y_1-y_2|$ sayısına eşit olup

$$|y_1-y_2|<y_1+y_2=1$$

eşitsizliğini sağlamaktadır. Böylece, $A(ABCD)<\sqrt{2}.1=\sqrt{2}$ çıkar.

(**b**) $x_1=\sqrt{y_1}$ ve $x_2=\sqrt{y_2}$ diyelim ve belirlilik için $x_1<x_2$ varsayalım. $x_1^2+x_2^2=y_1+y_2=1$ olduğundan $x_1=\sin\alpha$ ve $x_2=\cos\alpha$ sağlanacak biçimde $\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} S=A(ABCD) &= |MN|.(y_2-y_1)\\ &= (\sin\alpha+\cos\alpha)(1-2\sin^2\alpha)\\ &= (\sin\alpha+\cos\alpha).\cos 2\alpha,\\ S^2 &= (1+\sin 2\alpha)(1-\sin^2 2\alpha)\\ &= -t^3-t^2+t+1\equiv f(t),\ (t=\sin 2\alpha\in(0,1)). \end{aligned}$$

olur. $f'(t) = 0$ denkleminin pozitif kökü $t = 1/3$ olduğundan, $A(ABCD)$ alanının en büyük değeri $\sqrt{f(1/3)}$, $\sqrt{f(0)}$, $\sqrt{f(1)}$ sayılarının en büyüğüne eşit olacaktır. Böylece

$$max(A(ABCD)) = \sqrt{f(1/3)} = \sqrt{\frac{32}{27}}$$

olur.

(Çözenler : *Hasan Karabıyık (b), Janberk Şahin (a), Alper Çay (a), Cemal Özboğa (a).*)

Y.164. $p, q \in \mathbb{N}$, $q < 100$ olmak üzere, sayı ekseni üzerinde $\frac{p}{q}$ noktaları işaretlenmiştir. Uzunluğu 3.10^{-3} olan bir α parçası koordinat başlangıcından 1 noktasına doğru kaydırılıyor. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{5}]$ parçasının ikişer-ikişer birbirinden ayrık öyle dört tane alt aralığı vardır ki, α parçası bu aralıkların içinde bulunduğunda işaretlenmiş $\frac{p}{q}$ noktalarından hiç birine değmeyecektir, kanıtlayınız.

Çözüm. $\frac{p}{q} \neq \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$|\frac{1}{3} - \frac{p}{q}| = \frac{|q - 3p|}{3q} \geq \frac{1}{3q} > \frac{1}{300} > 3.10^{-3}$$

'dür. Dolayısıyla, $\frac{1}{3}$ 'ün sağında ve solunda uzunluğu 3.10^{-3} 'den büyük olan ve işaretlenmiş $\frac{p}{q}$ noktalarından hiç birini içermeyen birer aralık vardır. $\frac{1}{2}$ noktasının da sağında ve solunda işaretlenmiş noktaları içermeyen ve uzunluğu 3.10^{-3} 'den büyük olan aralıkların varlığı benzer şekilde gösterilir.

Y.165. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ sınırsız, kesin artan pozitif sayı dizisi olsun.

(a) Her $k \geq k_0$ için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısının varlığını gösteriniz.

(b) Her $k \geq k_1$ için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1998$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_1 \in \mathbb{N}$ sayısının varlığını gösteriniz.

Çözüm. (a) Verilen dizi sınırsız olduğundan, $2a_1 < a_m$ ve $2a_m < a_{k_0}$ sağlanacak biçimde bir k_0 vardır. Dizi kesin artan ve pozitif terimli olduğundan her $k \geq k_0$ için şunları yazabiliriz:

$$(1 - \frac{a_1}{a_2}) + (1 - \frac{a_2}{a_3}) + \cdots + (1 - \frac{a_k}{a_{k+1}})$$

$$= (\frac{a_2 - a_1}{a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_m - a_{m-1}}{a_m})$$

$$+ (\frac{a_{m+1} - a_m}{a_{m+1}} + \frac{a_{m+2} - a_{m+1}}{a_{m+2}} + \cdots + \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}})$$

$$> \frac{a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots + a_m - a_{m-1}}{a_m}$$

$$+ \frac{a_{m+1} - a_m + a_{m+2} - a_{m+1} + \cdots + a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}}$$

$$= \frac{a_m - a_1}{a_m} + \frac{a_{k+1} - a_m}{a_{k+1}}$$

$$= (1 - \frac{a_1}{a_m}) + (1 - \frac{a_m}{a_{k+1}})$$

$$= 2 - (\frac{a_1}{a_m} + \frac{a_m}{a_{k+1}}) > 1 .$$

Buradan (a) şıkkındaki eşitsizlik elde edilir.

(b) (a) şıkkındaki eşitsizliğe göre, yeteri kadar büyük her p için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_p}{a_{p+1}} < p - 1 \text{ 'dir.} \qquad (*)$$

Şimdi, (a) şıkkının hükmünü $a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3}, \cdots$ dizisine uygularsak, yeteri kadar büyük $q > p$ sayıları için

$$\frac{a_{p+1}}{a_{p+2}} + \frac{a_{p+2}}{a_{p+3}} + \cdots + \frac{a_q}{a_{q+1}} < (q - p) - 1 \qquad (**)$$

sağlanacaktır. $(*)$ ve $(**)$ eşitsizliklerini taraf-tarafa toplarsak, yeteri kadar büyük q 'lar için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_q}{a_{q+1}} < q - 2 \qquad (***)$$

olur. Şimdi de (a) şıkkının hükmünü $a_{q+1}, a_{q+2}, \cdots$ dizisine uygularsak, yeteri kadar büyük r 'ler için

$$\frac{a_{q+1}}{a_{q+2}} + \frac{a_{q+2}}{a_{q+3}} + \cdots + \frac{a_r}{a_{r+1}} < (r - q) - 1$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği $(* * *)$ ile toplarsak,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_r}{a_{r+1}} < r - 3$$

olur. Böylece, bu fikirleri 1997 defa uygularsak istenen sonuca varırız.