SAYILARIN SİHİRLİ DÜNYASINDA "PİSAGOR TEOREMİ" İLE BİR GEZİNTİ

Dursun Çalışkan
Matematik Öğretmeni

İnsanoğlu önce doğal, sonra tam, daha sonra rasyonel sayıları tanıdı. Pisagor; "Dik Üçgende Pisagor Teoremi" olarak bilinen, "Bir dik üçgenin dik kenar uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsünün uzunluğunun karesine eşittir" teoremini iddia edip ispatladığında irrasyonel sayıların varlığı henüz bilinmiyordu. Bundan dolayı, irrasyonel sayıların varlığı bilinene kadar pek çok matematikçi kenar uzunlukları pozitif tamsayı olan dik üçgenler üzerinde çalıştı. Bu yazıda biz x, y ve z pozitif tamsayıları bir dik üçgenin kenar uzunlukları ise, (x, y, z) üçlüsüne "Pisagor üçlüsü" diyeceğiz ve Pisagor üçlülerini inceleyeceğiz.

Milattan önce yaklaşık 1700 yıllarına ait bir Babil tabletinde bazı Pisagor üçlülerinin listesi bulundu, bunların bazıları büyük sayılar da içeriyordu. Fakat sonsuz sayıda Pisagor üçlüsünü veren bir metot gösteren ilk kişi Pisagor 'dur. Modern matematik dili ile Pisagor 'un bu metodunu şu şekilde ifade edebiliriz: "$n \neq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere $x = n$, $y = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$ ve $z = \frac{1}{2}(n^2+1)$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlüsü bir Pisagor üçlüsüdür."

x	y	z
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61

(Tablo 1)

Burada dikkat edilecek olursa $z = y + 1$ 'dir. Pisagor bu metotla bir taraftan sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü olduğunu gösterirken, diğer taraftan hipotenüsü bir dik kenarından 1 fazla olan sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü olduğunu göstermiştir (bak. Tablo 1). "$z = y + 1$ olacak şekilde bütün (x, y, z) Pisagor üçlüleri bu metotla elde edilebilir mi?" sorusunun cevabını araştırmayı okuyucuya bırakıyoruz.

Aslında Pisagor üçlülerinin sonsuz sayıda olduğunu daha basit şekilde görmek olaklı, şöyle ki: $(3, 4, 5)$ bir Pisagor üçlüsüdür. Bütün $k \geq 1$ tamsayıları için $(3k, 4k, 5k)$ bir Pisagor üçlüsüdür. Bu şekilde her Pisagor üçlüsünden sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü türetilebilir.

Plato (M. Ö. 430-349), $z = y + 2$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y, z) Pisagor üçlüsünün var olduğunu gösteren bir metot buldu. (Burada ve bundan sonra z hipotenüsün uzunluğu olarak alınacaktır.) Modern matematik dili ile bu şöyle ifade edilebilir: "$n \neq 0$ bir doğal sayı olmak üzere $x = 4n$, $y = 4n^2 - 1$ ve $z = 4n^2 + 1$ olacak şekilde tanımlanan (x, y, z) üçlüsü, $z = y + 2$ şartını sağlayan bir Pisagor üçlüsüdür" (bak. Tablo 2).

Acaba Plato 'nun verdiği bu metotla $z = y + 2$ koşulunu sağlayan bütün (x, y, z) Pisagor üçlüleri elde edilebilir mi? Cevap: Hayır. Örneğin, $x = 6$, $y = 8$ ve $z = 10$ iken $(x, y, z), z = y + 2$ koşulunu sağlayan bir Pisagor üçlüsüdür. Her n pozitif tamsayısı için $4n^2 + 1 \neq 10$ olduğundan bu üçlü yukarıda belirtilen metot ile elde edilemez. Şimdi biz $z = y + 2$ olacak şekilde bütün (x, y, z) Pisagor üçlülerini veren bir metot araştıralım.

x, y ve z $z = y + 2$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere (x, y, z) bir Pisagor üçlüsü olsun. $z^2 = y^2 + x^2$ ve $z = y + 2$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow z^2 - y^2 = x^2 \\ &\Rightarrow (z-y)(z+y) = x^2 \\ &\Rightarrow 2(2y+2) = x^2 \\ &\Rightarrow 4(y+1) = x^2 \,. \end{aligned}$$

Burada x bir çift sayı olmalıdır. $n \neq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere; $x = 2n$ yazarsak; $y + 1 = n^2 \Rightarrow y = n^2 - 1$ ve $z = n^2 + 1$ elde edilir. Öyle ise; $n \neq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere; $x = 2n$, $y = n^2 - 1$ ve $z = n^2 + 1$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlüleri $z = y + 2$ şartını sağlayan bütün Pisagor üçlüleridir (bak. Tablo 3).

x	y	z
4	3	5
8	15	17
12	35	37
16	63	65
20	99	101

(Tablo 2)

x	y	z
4	3	5
6	8	10
8	15	17
10	24	26
12	35	37

(Tablo 3)

Benzer şekilde $z = y + 3$ olacak şekilde bütün (x, y, z) Pisagor üçlülerinin; $n > 1$ bir pozitif tek sayı olmak üzere, $z = \frac{3}{2}(n^2 + 1)$, $y = \frac{3}{2}(n^2 - 1)$ ve $x = 3n$ şeklinde tanımlanan bir metotla elde edilebileceği gösterilebilir (bak. Tablo 4).

x	y	z
9	12	15
15	36	39
21	72	75
27	120	123
33	180	183

(Tablo 4)

Şimdi k herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $z = y + k$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y, z) Pisagor üçlüsünün var olduğunu gösterelim.

$n > 1$ bir tek sayı olmak üzere $z = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$, $y = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$ ve $x = n$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlülerinin $z = y + 1$ koşulunu sağlayan Pisagor üçlüleri olduğunu biliyoruz. Yani önerme $k = 1$ için doğrudur. Burada tanımlanan üçlünün her bileşenini k ile çarptığımızda elde edilen üçlünün de bir Pisagor üçlüsü olduğu açıktır. O halde, $n > 1$ bir tek sayı olmak üzere, bütün pozitif k tamsayıları için $x = k.n$, $y = \frac{k}{2}(n^2 - 1)$ ve $z = \frac{k}{2}(n^2 + 1)$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlüsü $z = y + k$ şartını sağlayan bir Pisagor üçlüsüdür. Öyleyse, bütün pozitif k tamsayıları için $z = y+k$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x, y, z) Pisagor üçlüsüdür vardır.

Burada insanın aklına şu soru geliyor: Bütün k pozitif tamsayıları için $n > 1$ bir tek sayı olmak üzere, $x = kn$, $y = \frac{k}{2}(n^2 - 1)$ ve $z = \frac{k}{2}(n^2 + 1)$ şeklinde tanımlanan (x, y, z) üçlüleri $z = y + k$ şeklindeki bütün Pisagor üçlüleri midir? Cevabın *hayır* olduğunu belirterek sebebini araştırmayı okuyucuya bırakıyoruz. Fakat bazı k değerleri için (hangi k değerleri?) cevap *evet* 'tir. (Tablo 1 ve Tablo 4 'ü karşılaştırınız.)

Buraya kadar Pisagor üçlülerinin sayısının sonsuz olduğunu iliklerimize kadar hissettik, hatta özel Pisagor üçlüleriyle uğraştık ve üstelik yukarıdaki metotla k ve n 'nin değişen değerleri için hemen hemen Pisagor üçlülerinin bütününü veren bir formüle ulaştık. Şimdi ise Öklit' in "Elementler" 'inde bile bulunan (kitap VII, IX ve X) daha genel ve daha kullanışlı bir teoremden bahsedeceğiz.

Teoremi ifade etmeden önce, x, y ve z ikişerli aralarında asal tamsayılar olacak şekilde (x, y, z) Pisagor üçlüsüne *temel Pisagor üçlüsü* diyeceğimizi ifade edelim.

Teorem. (x, y, z) 'nin bir temel Pisagor üçlüsü olması için gerek ve yeter koşul $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ ve $z = m^2 + n^2$ olacak şekilde, aralarında asal m ve n pozitif tamsayıları olmasıdır.

İspat. (x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsü olsun. x, y ve z 'nin her üçünün de tek sayı olamayacağı açıktır. İkişerli aralarında asal olduklarından herhangi ikisi çift olamaz. z 'nin çift olması durumunda $x^2 + y^2 = z^2$ ifadesinde sağ taraf 4 ile bölünürken sol taraf 4 ile bölündüğünde 2 kalanını vereceğinden z her durumda tek olmalıdır. Genelliği bozmadan diğer tek bileşenin y olduğunu kabul edelim.

Önce

$$\text{“}(y, z) = 1 \text{ ise, } (\tfrac{z-y}{2}, \tfrac{z+y}{2}) = 1 \text{ 'dir”} \qquad \text{(i)}$$

önermesini ispatlayalım. ($(y, z) = 1$ demek şu anlama gelir: y ve z sayılarının obeb'i, 1 'dir, diğer bir deyişle y ve z aralarında asaldır.)

$$(y, z) = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbf{Z} \text{ öyle ki, } a.y + b.z = 1$$

$$\Rightarrow (b - a)\frac{z - y}{2} + (b + a)\frac{z + y}{2} = 1 .$$

$b - a$ ve $b + a \in \mathbf{Z}$ olduğundan

$$(\frac{z - y}{2}, \frac{z + y}{2}) = 1$$

'dir.

x çift sayı olduğundan $x = 2k$ yazabiliriz. Öyle ise,

$$z^2 - y^2 = 4k^2 \Rightarrow (z - y)(z + y) = 4k^2$$

$$\Rightarrow \tfrac{z-y}{2} . \tfrac{z+y}{2} = k^2 \qquad \text{(ii)}$$

(i) ve (ii) 'ye göre $\frac{z-y}{2}$ ve $\frac{z+y}{2}$ 'nin her ikisi de tamkaredir. Yani $\frac{z+y}{2} = m^2$ ve $\frac{z-y}{2} = n^2$ olacak şekilde n ve m pozitif tamsayıları vardır. (i) 'ye göre $(n, m) = 1$ 'dir. O halde, $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ ve $z = m^2 + n^2$ olacak şekilde aralarında asal m ve n pozitif tamsayıları vardır.

Şimdi de $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ ve $z = m^2 + n^2$ olacak şekilde aralarında asal m ve n pozitif tamsayılarının var olduğunu kabul edelim. $2mn$, $m^2 - n^2$ ve $m^2 + n^2$ sayılarının ikişerli aralarında asal oldukları açıktır.

$$(m^2 + n^2)^2 = (n^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

olduğundan $x^2 + y^2 = z^2$ 'dir.

O halde, (x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsüdür.

Bu teoremden şu sonuçları çıkarabiliriz: x bir çift sayı olmak üzere (x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsü ise,

(i) $\frac{z-y}{2}$ ve $\frac{z+y}{2}$ 'nin her ikisi de tamkaredir.

(ii) $z + x$ bir tamkaredir.

Şimdi bu teoremin uygulamalarını örneklerle gösterelim:

Örnek 1. Bir bileşeni 1997 olan bütün Pisagor üçlülerini bulunuz.

Çözüm. $y = 1997$ ya da $z = 1997$ 'dir. $y = 1997$ ise, $z^2 - x^2 = 1997^2 \Rightarrow (z - x)(z + x) = 3988009$.

1997 bir asal sayı olduğundan,

$z - x = 1$ ve $z + x = 3988009 \Rightarrow z = 1994005$ ve $x = 1994004$ olur.

$z = 1997$ ise, 1997 bir asal sayı olduğundan (x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsüdür. Öyle ise, $x + z$ bir tamkaredir. $1 \leq x < z = 1997$ ve x bir çift sayı olduğundan, $1999 \leq x + z \leq 3993$ ve $x + z$ bir tek sayıdır. O halde $x + z$; 45^2, 47^2, 49^2, 51^2, 53^2, 55^2, 57^2, 59^2, 61^2 ve 63^2 sayılarından biri olabilir. Bu sayıları denediğimizde $x + z = 3969 (= 63^2)$, yani $x = 1972$ bulunur. Bu durumda $y = 315$ olur.

Aranan üçlüler; $(1972, 315, 1997)$ ve $(1994004, 1997, 1994005)$ 'dir.

Örnek 2. $2k^2 + 2k + 1$ bir tamkare olacak şekilde, 4 tane pozitif k tamsayısı bulunuz.

Çözüm. İfadeyi düzenlersek $k^2 + (k + 1)^2$ elde edilir. İlk iki bileşeninin farkı 1 olan Pisagor üçlüleri sorunun koşulunu sağlar. Bu üçlüler temel Pisagor üçlüsüdür (Niçin?). Öyle ise $\exists\, m, n \in \mathbb{Z}^+$, $(m, n) = 1$, $x = 2mn$ ve $y = m^2 - n^2$ 'dir. Burada $|x - y| = 1$ olduğundan biz $m^2 - n^2 - 2mn = \mp 1$ denkleminin 4 tane pozitif tamsayı çözümünü bulmalıyız. Bu denklemi $(m - n)^2 = \mp 1 + 2n^2$ şeklinde ifade edebiliriz. n 'ye değer verdiğimizde $n = 1$, 2, 5 ve 12 için denklemin sağlandığı görülür.

$$\begin{aligned} n = 1 &\text{ ise}, m = 2 \text{ ve } k = 3 \\ n = 2 &\text{ ise}, m = 5 \text{ ve } k = 20 \\ n = 5 &\text{ ise}, m = 12 \text{ ve } k = 119 \\ n = 12 &\text{ ise}, m = 29 \text{ ve } k = 696 \end{aligned}$$

bulunur. Öyle ise k; $3, 20, 119, 696$ değerlerinden birini aldığında $2k^2 + 2k + 1$ bir tamkaredir.

Örnek 3. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ | x^2 + y^2 = z^2, z \leq 100 \text{ ve } (x, y) = 1\}$ kümesi veriliyor. A kümesi kaç elemanlıdır?

Çözüm. A kümesinin tanımına göre, (x, y, z) üçlüleri temel Pisagor üçlüleridir. $B = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ | m > n, m^2 + n^2 \leq 100 \text{ ve } (m, n) = 1\}$ kümesini tanımlayalım. A 'nın eleman sayısı B 'nin eleman sayısının iki katıdır (Niçin?). B 'nin eleman sayısını bulalım.

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 \leq 100 &\Rightarrow 2n^2 < 100 \\ &\Rightarrow n^2 < 50 \\ &\Rightarrow n \leq 7 \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 1 + m^2 \leq m^2 + n^2 \leq 100 &\Rightarrow m^2 \leq 99 \\ &\Rightarrow m \leq 9 \text{ 'dur.} \end{aligned}$$

$(n, m) = 1$, $m > n$ ve $m^2 + n^2 \leq 100$ olduğunu gözönünde bulundurduğumuzda,

$n = 1$ iken m, 8 değer $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ alabilir,
$n = 2$ iken m, 4 değer $(3, 5, 7, 9)$ alabilir,
$n = 3$ iken m, 4 değer $(4, 5, 7, 8)$ alabilir,
$n = 4$ iken m, 3 değer $(5, 7, 9)$ alabilir,
$n = 5$ iken m, 3 değer $(6, 7, 8)$ alabilir,
$n = 6$ iken m, 1 değer (7) alabilir.
$n = 7$ iken m hiç bir değer alamaz.

Öyle ise B 'nin eleman sayısı 23 ve A 'nın eleman sayısı 46 'dır.

Örnek 4. (x, y, z) bir Pisagor üçlüsü ise, $x.y.z$ çarpımının 60 ile bölündüğünü ispatlayınız.

Çözüm. Önermenin doğruluğunu temel Pisagor üçlüleri için göstermek yeterlidir (Niçin?).

(x, y, z) bir temel Pisagor üçlüsü olsun. $z = m^2 + n^2$, $y = m^2 - n^2$ ve $x = 2mn$ olacak şekilde aralarında asal m ve n pozitif tamsayıları vardır. z ve y tek sayı olduklarından m ve n sayılarından biri çifttir. Dolayısıyla $2mn$, yani x, 4 ile bölünür. m ve n sayılarından biri 3 ile bölünürse, x; değilse, m^2 ve n^2 'nin her ikisi de 3 ile bölündüğünde 1 kalanını verdiklerinden y, 3 ile bölünür. m ve n sayılarından biri 5 ile bölünürse, x; değil ise, 5 ile bölünmeyen bir sayının karesinin 5 ile bölümünden kalan 1 ya da 4 olduğundan, y ya da z, 5 ile bölünür. Öyle ise her durumda $x.y.z$ çarpımı $4.3.5 = 60$ ile bölünür.

Örnek 5. x, y ve z pozitif reel sayılar olmak üzere, $x + y + z = 1$ 'dir.

$$\frac{(1+x)^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2}{xy + xz + yz} \geq 16$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. x, y ve z pozitif olduğundan,

$$2x(y+z) \leq (\tfrac{2x+y+z}{2})^2,$$

$$2y(x+z) \leq (\tfrac{2y+x+z}{2})^2,$$

$$2z(x+y) \leq (\tfrac{2z+x+y}{2})^2 \Rightarrow$$

$$4(xy + xz + yz) \leq \tfrac{1}{4}[(1+x)^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2]$$

$$\Rightarrow \tfrac{(1+x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2}{xy+xz+yz} \geq 16$$

bulunur.

Sorular :

1. $x^2 - 2y^2 = -1$ olacak şekilde 5 tane pozitif (x, y) tamsayı ikilisi bulunuz.

2. $x+y+z = 854$ olacak şekilde bütün (x, y, z) Pisagor üçlülerini bulunuz.

3. Hipotenüsünün uzunluğu 1999 ve bütün kenarlarının uzunluğu tamsayı olan bir dik üçgen olup olmadığını araştırınız.

* * *