BERNSTEIN 'IN KANITLAMASI

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü, Vezneciler-İSTANBUL

Tüm tamsayıların kümesi $\mathbf{Z}$ 'de "kaç tane" tamsayı vardır? Sonsuz tane! Doğru (ama yetersiz) yanıt. Neden yetersiz? "Kuşkusuz $\mathbf{Z}$ kümesinde, çift tamsayılar kümesindeki tamsayılardan daha fazla sayıda tamsayı vardır." Doğru mu bu? Hayır, yanlış! Gökyüzündeki yıldızların sayısı, Nasrettin Hoca 'nın çilekeş eşeğinin kıllarının sayısından daha mı fazladır? Gerçi şakacı hoca aynı sayıda olduklarını söylemişti. Peki $\mathbf{Z}$ kümesinin ve çift tamsayılar kümesinin eleman sayıları nedir? Tüm irrasyonel sayıların kümesi $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ ile, düzlemde en az bir bileşeni irrasyonel olan gerçel sayı ikililerinin kümesinden (ki biraz dikkat edilirse bunun $(\mathbf{R}\times(\mathbf{R}-\mathbf{Q}))\cup((\mathbf{R}-\mathbf{Q})\times\mathbf{R})$ birleşim kümesi olduğunu gözleyebilirsiniz) hangisinde "daha fazla sayıda" eleman vardır; yoksa "eleman sayıları" aynı mıdır? Düzlemde eğimi bir irrasyonel sayı olan "kaç tane" doğru vardır?

Bunları ve benzeri soruları yanıtlamak için, matematik, her zaman yaptığı gibi, kesin ve mutlak biçimde tanımlanmış kavramlara gereksinim duyar. Unutulmasın, koca usta Bertrand Russell 'ın dediği gibi, matematik insanoğlunun geliştirdiği biricik kesin ve mutlak dildir. Sözünü ettiğimiz konuda, matematik, ordinal ve kardinal sayıları ve onlar üzerinde şaşırtıcı özellikleri olan aritmetik işlemleri ve sıralamayı tanımlama başarısını göstermiştir. Kimilerine göre bu, tüm matematik tarihinin en göz kamaştırıcı, en inanılmaz başarılarının önde gelenlerindendir. Biz bu yazıda, Paul Halmos 'un deyimiyle daha "naif" bir yaklaşım içinde olacağız, zorunlu olarak! Ordinal ve kardinal sayıları popüler bir matematik dergisinde ayrıntılı ele almak kolay değildir. Ve biz, bu yazıda, Georg Cantor 'un 1870 'lerin ortasında yaptığı şu temel tanımlamalarla yetinmeğe çalışacağız: Aralarında bire-bir ve örten bir fonksiyon tanımlı iki kümeye **eş kuvvette** (kabaca söylersek, "aynı sayıda elemana sahipler") denir. Kolayca görülebileceği gibi $k \leftrightarrow 2k$ bire-bir ve örten eşleşmesi sayesinde $\mathbf{Z}$ ile tüm çift tamsayıların kümesi olan $\mathbf{Z}_0 = \{2k : k \in \mathbf{Z}\}$ 'nin eş kuvvette oldukları görülecektir. Peki siz, $\mathbf{Z}$ ile tüm tek sayıların kümesinin eş kuvvette olduklarını gösterebilir misiniz? Çok kolay!

"Aman tanrım, $\mathbf{Z}$ ile tüm pozitif tamsayıların kümesi $\mathbf{N}$ 'nin eş kuvvette olduklarını görüyorum" dediğinizi duyar gibiyim; evet, doğru gözlediniz.

$$\mathbf{Z} = \{,\cdots,-n,\cdots,-1,0,1,\cdots,n,\cdots\}$$

kümesinden $\mathbf{N} = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ kümesine

$$f(n) = 2n+1,\ f(-n) = 2n,\ f(0) = 1\ (n \in \mathbf{N})$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun bire-bir ve örten olduğunu görmek kolaydır. Peki $\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ kümesiyle $\mathbf{N}$ arasında çeşitli bire-bir ve örten fonksiyonlar tanımlamaya ne dersiniz? Peki ya, tüm pozitif tamsayı sıralı ikililerinin kümesi olan $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ ile $\mathbf{N}$ kümesi arasında bire-bir ve örten fonksiyonlar tanımlamaya ne dersiniz? Evet, şaşırmayın bu kümeler eş kuvvettedir.

$$f(n,m) = n + \frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)\ ,$$

$$g(n,m) = 2^{m-1}(2n-1)$$

biçiminde tanımlanan

$$f : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

ve

$$g : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

fonksiyonlarının ikisi de bu niteliktedir; g ile uğraşmak, görece olarak biraz daha kolaydır. Birincisine Cantor köşegen sayma fonksiyonu denir (bak. Matematik Dünyası, Haziran-Ağustos 1991, 2-6). Cantor bu kavramlarla uğraşırken şu inanılmaz önermeyi kanıtlamağa çalışmıştı:

Ana Önerme: Eğer X kümesinden Y kümesine (örten olması gerekmeyen) bire-bir bir fonksiyon tanımlıysa ve tersine Y kümesinden X kümesine bire-bir bir fonksiyon tanımlıysa, bu iki küme eş kuvvettedir.

Onca çabasına karşın, Cantor bu ilginç ve zorlu önermenin **sağlıklı** bir kanıtlamasını veremedi. Bu teoreme, günümüzde, onu ilk kanıtlayan Bernstein 'ın adını da katarak, **Cantor-Bernstein**

Teoremi adı verilir. Bu yazımızda öncelikle bu güzelim kanıtlamayı size aktarmak istiyoruz. Örneğin yukarıdaki g fonksiyonunun (en azından) bire-bir olduğunu gösterebilen ve kavrama çabası ile okuyan her **ilgili** okuyucunun bu yazıdan yararlanacağını sanıyoruz. Demek ki küme işlemlerini ve fonksiyon kavramını biliyoruz, öyle değil mi sevgili okurlar! Şimdi öncelikle şu önemli uyarıyla işe başlayalım: Herhangi bir $f : X \to Y$ fonksiyonunun, her zaman, $A, B \subseteq X$ altkümeleri ne olursa olsun, $f(A-B) = f(A) - f(B)$ eşitliğini gerçeklemesi **gerekmez**. Bakınız aşağıdaki karşıt örnek yeterince uyarıcıdır: Sinüs fonksiyonu, yani her $x \in \mathbf{R}$ için $f(x) = \sin x$ biçiminde tanımlanan $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ fonksiyonu, örneğin $A = \mathbf{Q}$ ve $B = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ küme çifti için $f(A-B) \neq f(A) - f(B)$ gerçekler. Dikkat edilirse $r \in \mathbf{Q}$ rasyonel sayısı ne olursa olsun

$$\begin{aligned} f(r) = \sin r &= \sin(r + 2\pi) \\ &= f(r + 2\pi) \in f(\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = f(B) \end{aligned}$$

gerçeklenir, çünkü $r + 2\pi$ bir irrasyonel sayıdır, çünkü π bir irrasyonel sayıdır, anımsadık değil mi? O halde

$$f(A) = f(\mathbf{Q}) = \cup(\{f(r)\} : r \in \mathbf{Q}) \subseteq f(B)$$

olduğundan $f(A) - f(B)$ fark kümesi boştur, oysa bu örnekte A ve B ayrık olduklarından $A - B = A$ ve sonuçta $f(A - B) = f(A)$ olur ki bu küme boş değildir ve üstelik "sonsuz elemanlıdır", çünkü r_1 ve r_2 rasyonel sayıları farklı ise, $f(r_1) = \sin r_1$ ve $f(r_2) = \sin r_2$ gerçel sayıları **farklıdır**, neden? Şimdi ise, eğer $f : X \to Y$ **bire-bir bir fonksiyon ise**, A ve $B \subseteq X$ altkümeleri ne olursa olsun $f(A - B) = f(A) - f(B)$ eşitliğinin gerçeklendiğini gösterelim. Kolayca gözleneceği gibi ayrık kümelerin bire-bir bir fonksiyon altındaki görüntüleri ayrıktır, neden? O halde $f(A - B)$ ile $f(B)$ görüntü kümeleri, f bire-bir ise, ayrıktır ve sonuçta

$$f(A - B) \subseteq f(A) - f(B)$$

kapsaması geçerli olur. Dikkat: Ters sıradaki kapsama her zaman her fonksiyon için zaten geçerlidir, neden? O halde **bire-bir bir fonksiyon altında** bir fark kümesinin görüntüsü, gerçekten, görüntü kümelerinin farkına eşit olmaktadır.

Şimdi Bernstein 'ın kanıtlamasını iki aşamada inceleyelim:

Birinci Aşama: "Eğer $X_1 \subseteq Y \subseteq X$ ise, üstelik X_1 ile X kümeleri eş kuvvette ise, Y kümesi ile X kümesi eş kuvvettedir" önermesini kanıtlayalım. Başlıyoruz. Hipotez gereği $f : X \to X_1$ gibi bire-bir bir f fonksiyonu tanımlıdır. Kanıtlamanın ardından bu fonksiyon üzerine biraz konuşacağız. Şimdi $X_0 = X, Y_0 = Y$ ve her $n \in \mathbf{N}$ için

$$X_n = f(X_{n-1}), \; Y_n = f(Y_{n-1})$$

tanımlayalım. Tümevarım kullanarak, kolaylıkla

$$X_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq X_{n-1} \quad (n \in \mathbf{N})$$

gösterebiliriz. Hipotez gereği

$$X_1 \subseteq Y = Y_0 \subseteq X = X_0$$

olduğundan, $n = 1$ için geçerli olan bu kapsamalar eğer n doğal sayısı için geçerliyse, f altındaki görüntüleri

$$X_{n+1} = f(X_n) \subseteq f(Y_{n-1}) = Y_n \subseteq f(X_{n-1}) = X_n$$

gercekleyecektir ve iddia $n+1$ doğal sayısı için de geçerli olacaktır. Üstelik $X_n - Y_n$ fark kümeleri ikişerli olarak ayrıktır, çünkü $n \neq m$ ise,

$$(X_n - Y_n) \cap (X_m - Y_m) = \emptyset$$

geçerlidir; gerçekten, örneğin $n < m$ ise, $n + 1 \leq m$ olur ve $X_m \subseteq X_{n+1}$ nedeniyle bu kesişim kümesi, kolayca görüleceği gibi,

$$X_m - Y_n \subseteq X_{n+1} - Y_n = \emptyset$$

tarafından kapsanır. Neden? Yani boş olur. Şimdi de

$$X - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_n - Y_n) = Y - \bigcup_{n=0}^{\infty} (X_{n+1} - Y_{n+1}) \quad (1)$$

gözleyelim. Gerçekten sol yan

$$\begin{aligned} &= X - [(X_0 - Y_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n - Y_n)] \\ &= (X - (X_0 - Y_0)) \cap (X - \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n - Y_n)) \end{aligned}$$

olup, $X_0 = X$ ve

$$X - (X_0 - Y_0) = X - (X - Y) = Y$$

geçerli olacağından, bu son küme, gerekli indis değişikliği ile

$$\begin{aligned} Y &\cap (X - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - Y_{n+1})) \\ &= (Y \cap X) - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - Y_{n+1}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $Y \subseteq X$ nedeniyle geçerli olan $Y \cap X = Y$ eşitliği bize sonuçta (1) eşitliğini verir. Üstelik $Y_1 = Y_{2-1} \subseteq X_{2-1} = X_1 \subseteq Y$ ve $n \geq 2$ için tümevarımla $Y_n \subseteq X_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq Y$ nedeniyle tüm Y_n (ve $X_n (n \geq 1)$) altkümelerinin Y tarafından kapsandığı bellidir. O halde

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - Y_{n+1}) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} X_{n+1} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n \subseteq Y$$

nedeniyle

$$Y \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - Y_{n+1}) = Y \tag{2}$$

geçerli olur. $B \subseteq A$ ise, $A \cup B = A$ olduğunu anımsadık, değil mi? Şimdi artık X ve Y kümeleri arasında, bire-bir ve örten olduğunu göstereceğimiz $g : X \to Y$;

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \in \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n) \\ x & ; \ x \in X - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n) \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Dikkat edilirse, eğer $x \in X - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n)$ ise, (1) nedeniyle $g(x) = x \in Y$ dir, yok eğer $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n)$ ise, $g(x) = f(x)$ elemanı yine

$$\begin{aligned} f(\bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n)) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} f(X_n - Y_n) \\ &\overset{(*)}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty}(f(X_n) - f(Y_n)) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - Y_{n+1}) \subseteq Y \end{aligned}$$

kümesinin elemanı olur. $(*)$ eşitliğini yazarken f fonksiyonunun bire-bir olduğunu anımsadık. Demek ki g fonksiyonu her bir $x \in X$ elemanına Y kümesinde bir eleman eşleştirmektedir. Peki g fonksiyonu örten midir? Evet! Çünkü

$$\begin{aligned} g(X) &= g[\bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n) \cup (X - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n))] \\ &= g(\bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n)) \cup g(X - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n)) \\ &= f(\bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n)) \cup (X - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n)) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - Y_{n+1}) \cup (Y - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - Y_{n+1})) \\ &= Y \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_{n+1} - Y_{n+1}) = Y \end{aligned}$$

bulunur; burada en son aşamaya geçerken $A \cup (B - A) = A \cup B$ özdeşliği ve son adımda ise (2) kullanıldı. Demek ki $g(X) = Y$ olmaktadır yani Y kümesindeki her bir eleman X kümesindeki uygun bir elemanın görüntüsüdür, bu ise g 'nin örten olması demektir.

Şimdi de $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ için $g(x_1) \neq g(x_2)$ gerçeklendiğini, kısacası g 'nin bire-bir olduğunu gözleyelim. Çeşitli durumları irdelemeliyiz. Eğer

$$x_1 \in E_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n),$$

$$x_2 \in E_2 = X - E_1 = X - \bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n - Y_n)$$

ise, uygun bir $0 \leq n_0$ sayesinde $x_1 \in X_{n_0} - Y_{n_0}$ ve sonuçta, yine f in bire-bir oluşundan yararlanarak, $g(x_1) = f(x_1) \in f(X_{n_0} - Y_{n_0}) = f(X_{n_0}) - f(Y_{n_0}) = X_{n_0+1} - Y_{n_0+1} \subseteq E_1$ ve $g(x_2) = x_2 \in E_2$ bulunur; E_1 ve E_2 ayrık olduklarından $g(x_1)$, $g(x_2)$ elemanları zorunlu olarak farklıdır. Eğer $x_1, x_2 \in E_2$ ise, bu kez $g(x_1) = x_1$ ve $g(x_2) = x_2$ elemanlarının farklı oldukları apaçıktır. Peki ya $x_1, x_2 \in E_1$ için neden $g(x_1) \neq g(x_2)$ olur, kolayca gözlemliyorsunuz değil mi? Evet tüm durumları irdeledik, demek ki g gerçekten bire-bir ve örtendir. Birinci önermenin kanıtlaması bitmiştir ama bu kez de son ve sonuç alıcı aşamaya geldik:

Sonuç Aşaması : Eğer $h : X \to Y$ ve $h' : Y \to X$ bire-bir fonksiyonları tanımlıysa, X ve Y kümeleri eş kuvvettedir. Evet, gerçekten $h(X) \subseteq Y$ olduğundan sonuçta $X_1 = h'(h(X))$ alınırsa (ya da daha yerinde bir deyimle, birinci aşamadaki X_1 kümesi olarak bu kez $h'(h(X))$ alınırsa) $X_1 \subseteq h'(Y) \subseteq X$ kapsamaları geçerli olur ve üstelik h bire-bir olduğundan, $x \leftrightarrow h(x)$ eşlemesi sayesinde $h(X)$ ile X kümeleri eş kuvvette olurlar, ve dolayısıyla benzer gerekçeyle h' bire-bir olduğundan $X_1 = h'(h(X))$ kümesi, $h(X)$ kümesiyle ve dolayısıyla X kümesiyle eş kuvvettedir; çünkü bileşkeleri tanımlanabilen iki tane bire-bir ve örten fonksiyonun bileşkesi de bire-bir ve örtendir. Sonuçta birinci önerme nedeniyle $h'(Y)$ ile X eş kuvvette olurlar, oysa Y kümesi $h'(Y)$ ile eş kuvvettedir; dolayısıyla Y ile X kümeleri eş kuvvette olurlar. Sonuç aşamasının (yani ana önermenin, başka bir deyimle Cantor-Bernstein Teoreminin) kanıtlaması bitmiştir.

Uyarı ve Uygulama: Şimdi bu önemli teoremin küçük ama önemli bir uygulamasını görelim. Ama önce bir sözümüzü yerine getirelim. Birinci aşamada, tüm bu aşamanın kanıtlanması sırasında kullandığımız $f : X \to X_1$ fonksiyonu üzerine, kanıtlamanın ardından konuşacağız demiştik. Dikkatli okurun gözünden kaçmamıştır: Bu fonksiyonun örtenlik özelliğinden hiç yararlanmadık, zaten f fonksiyonunun örten olduğu **vurgulanmamıştı**. Dikkat edilirse birinci aşamanın kanıtlanması sırasında f 'in bire-bir oluşu **yeterli olmuştur**. Dolayısıyla aslında birinci aşamada kanıtlanan şu olmuştur: "Eğer X kümesinden bir X_1 altkümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon varsa X kümesi X_1 ile (ve aslında X_1 altkümesini kapsayan **tüm** altkümeleriyle) eş kuvvette olur." Peki bu yeni önerme, sonuç aşamasının kanıtlanabilmesi için yeterli bir bilgi midir? Dikkatli okurlar hemen yanıtlayacaklardır: Evet! Neden dersiniz? Sözü artık fazla uzatmadan önemli uygulamamıza geçelim. Şunu kanıtlayacağız: N kümesiyle, onun tüm sonlu elemanlı altkümelerinin kümesi $\mathcal{A}(\mathrm{N})$ eş kuvvettedir. Öncelikle N ile, onun iki elemanlı altkümelerinin kümesi olan

$$\mathcal{P}_2(\mathrm{N}) = \{\{n,m\} : n,m \in \mathrm{N}, n \neq m\}$$

'nin eş kuvvette olduklarını gösterelim. $\{n,m\}$ kümesine, birinci bileşeni, bu farklı doğal sayıların en küçüğü, ikinci bileşeni ise en büyüğü olan sıralı ikiliye gönderen eşleştirme (örneğin $\{1,3\} \to (1,3)$ gerçekleyen eşleştirme) apaçıktır ki bire-birdir. O halde $\mathcal{P}_2(\mathrm{N})$ kümesinden $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ kümesine (ve dolayısıyla N kümesine) tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır. Öte yandan $n \to \{n, n+1\}$ eşleştirmesi de N kümesinden $\mathcal{P}_2(\mathrm{N})$ kümesine tanımlanmış bir bire-bir fonksiyondur. O halde Cantor-Bernstein Teoremi nedeniyle N ile $\mathcal{P}_2(\mathrm{N})$ eş kuvvettedir. Peki N kümesinin tüm 3 elemanlı altkümelerinin kümesi $\mathcal{P}_3(\mathrm{N})$ ile N neden eş kuvvettedir? Gerçekten, her n doğal sayısına $\{n, n+1, n+2\}$ üç elemanlı kümesini eşleştiren fonksiyon N 'den $\mathcal{P}_3(\mathrm{N})$ kümesine tanımlanmış bir bire-bir fonksiyondur; öte yandan $\{n_1, n_2, n_3\}$ üç farklı doğal sayının oluşturduğu kümesine $(2^{n_1-1}(2n_2-1), n_3)$ sıralı ikilisini eşleştiren fonksiyon göstermektedir ki $\mathcal{P}_3(\mathrm{N})$ 'den $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ kümesine ve dolayısıyla N kümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır. O halde yine Cantor-Bernstein Teoremi yardımıyla N ile $\mathcal{P}_3(\mathrm{N})$ kümelerinin eş kuvvette olduğu anlaşılır. Genel olarak $\mathcal{P}_n(\mathrm{N})$,

$$\mathrm{N}^n = \mathrm{N} \times \mathrm{N} \times \cdots \times \mathrm{N} \quad (n \text{ tane çarpım})$$

ve N kümelerinin eş kuvvette olduklarını, okuyucu, sanırız Cantor-Bernstein Teoremi yardımıyla gösterebilecektir. Dikkat edilirse $\mathcal{P}_n(\mathrm{N})$ ile $\mathcal{P}_m(\mathrm{N})$ kümeleri, $n \neq m$ ise ayrıktırlar. Bu önemli ayrıntı sayesinde, herhangi bir

$$A \in \mathcal{A}(\mathrm{N}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathrm{N})$$

"elemanı" tek türlü belirli bir $\mathcal{P}_n(\mathrm{N})$ kümesine ait olabileceğinden, $\varphi(A) = (n, h_n(A))$ şeklinde tanımlanan

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathrm{N} \times \mathrm{N}$$

fonksiyonu kolayca gözlemlenebiceği gibi bire-birdir; burada her $n \in \mathrm{N}$ için h_n bire-bir fonksiyonu $\mathcal{P}_n(\mathrm{N})$ 'den N kümesine tanımlıdır, böyle bir fonksiyonun varlığı az önce vurgulanmıştı. O halde $\mathcal{A}$ kümesinden N kümesine bire-bir bir fonksiyon tanımlıdır. $n \to \{n\}$ eşleştirmesi ise, apaçıktır ki, N 'den $\mathcal{A}$ kümesi "içine" bire-birdir. O halde, yine, Cantor-Bernstein Teoreminin bir sonucu olarak N ile $\mathcal{A}$ eş kuvvette olurlar. Evet bitti.

Bir X kümesinin bir Y kümesinden "daha az elemanlı" olması ve benzeri kavramlar için, Cantor köşegen sayma fonksiyonunun ayrıntılı ele alınışı için, elinizde tuttuğunuz derginin 1991 yılı Haziran-Ağustos sayısına bakınız sevgili okurlar. Umarım yazının başında sorulan tüm soruları artık yanıtlayabilirsiniz. İyi çalışmalar!