FİZİKTE ZETA-FONKSİYONU (II)

M. Gündüz İkeda
TÜBİTAK Feza Gürsey Enstitüsü, PK 6, Çengelköy, 81220-İSTANBUL

Cahit Bey ve Feza Bey'in anısına...

---

3. Aritmetik Fizik

Ben fizikçi değilim, fakat bu evrende yaşayan biri olarak, evrenin sırrıyla doğal olarak (amatörce) ilgileniyorum. Bugünlerde duyduğum şeyler arasında şu haber de vardı: Son yıllarda Temel Parçacık Teorisinde büyük değişikliklerin meydana geldiği, örneğin parçacık kavramının yerine sicim (="string") kavramının yer almış olduğu, dolayısıyla teorik fizikçilerin bu yeni kavramla şimdiye kadar bilinen sonuçların yeniden elde edilmesi, ve yeni sonuçların çıkarılması için çabaladığı v.s. gibi. (Not: Sicim Teorisi için "Conformal Invariance and String Theory" (Academic Press, 1989) kitabından I. Ya. Aref'eva 'nın "String Field Theory" adlı makalesine bakınız.) Fakat benim esas olarak anlatmak istediğim şey, Sicim Teorisinden ziyade sessizce gelişen başka bir fikir akımıdır. Konuya bir hikaye ile başlayalım. 1986 yılında Berkeley 'de düzenlenen "International Congress of Mathematicians" 'da G. Faltings 'in konuşmasını dinledikten sonra, E. Witten hemen en yakın kitapçılara koşup, Sayılar Teorisi ile ilgili ne var ne yok bütün kitapları almıştır. (Not olarak hatırlatayım: G. Faltings, Mordell konjektürünü çözdüğü için Fields Madalyasını almış bir matematikçi, ve E. Witten ise Pür Matematiğin Topolojik Kuantum Teorisine, bilhassa Sicim Teorisine, uygulanmasında yaptığı büyük katkılardan dolayı 1990 'da Fields Madalyasını alan yegane fizikçidir.) Meğer Faltings yaptığı konuşmada, Sicim Teorisinde, çok önemli bir yer işgal eden Polyakov ölçümünün hesaplanmasında Sayılar Teorisinden faydalanabileceğini anlatmış. Bu hikayeden de anlaşılacağı gibi, son yıllarda Sayılar Teorisi ile Kuantum Teorisi arasındaki yakınlaşmadan sık sık bahsedilmektedir. Bir zamanki (ve hala devam etmekte olan) Operatör Teorisi ve Harmonik Analiz, özellikle lokal kompakt grupların Temsil Teorisi, ile Kuantum Teorisi arasındaki etkileşmeler (Not: Bu husus için, "A. J. Coleman: Groups and Physics, AMS Notices 44, No. 1 (1997)" yazısına bakınız), ve son yıllarda görülen düşük boyutlu topoloji ile kuantum teorisi arasındaki etkileşmelerden sonra (Not: Bu husus için Turk. J. Math.(1995) dergisinde çıkan M. Atiyah 'ın makalesine bakınız), bugün Sayılar Teorisi ile Kuantum Teorisi arasındaki sıkı etkileşmeler söz konusudur. Acaba bunun temelinde yatan şey nedir diye merak ettim, ve yukarıda bahsettiğim "Conformal Invariance ..." kitabını karıştırdım. Aşağıda, bu kitap içinde bulunan Aref'eva 'nın "String Field Theory" ve Yu. I. Manin 'nin "Reflections on Aritmetic Physics" adlı makalelerden anladığımı, şimdiye kadar yazdığım şeylerin akışı içinde kısaca sunmaya çalışacağım. Not olarak, Yu. I. Manin 'nin bilhassa Sayılar Teorisinde çok tanınmış bir matematikçi olduğuna işaret edeyim.

Kuantum Teorisindeki "Belirsizlik Prensibine" göre Planck ölçeğinden (2×10^{-35} metre) daha küçük çapta olan Planck-altı bölgesinde (= "sub-Planckian domain") ölçüm işleminin direkt olarak yapılamayacağı söylenmektedir. Dolayısıyla Planck-altı Fiziğinin yapılabilmesi için Kuantum Teorisinden başka yeni bir teorinin kurulmasına ihtiyaç olacaktır. Bu ihtiyaca karşı I. V. Volovich (Theor. Math. Phys. 71 (1987)) şöyle bir fikir ortaya atmıştır: Şimdiye kadar kullanılan yöntemin hepsi, $\mathbf{R}$ üzerindeki geometri (yani Q 'nun $|.|_\infty$ valuasiyonuna göre tarif edilen metriğe dayanan geometri) ile yapılmış idi, ve bu geometrinin en belirgin özelliği de "archimedean" oluşudur, şu halde yukarıdaki çıkmazdan kurtulabilmemiz için archimedean geometriden vazgeçip, $|.|_p$ p-adik valuasiyonuna dayanan Q_p üzerindeki geometriyi kullanarak yeni fiziksel bir teoriyi kurmamız gerekir ve p-adik fiziğin ilk adımı olarak, Sicim Teorisinde önemli bir yer alan Veneziano genişliğini (= "Veneziano amplitude") ele alarak, bunun p-adik analojisinin ($p \to$ iken) limiti olarak ifade edildiğini göstermiştir. Ancak Volovich 'in fikrinin, ne meta-fiziksel olarak, ne de matematiksel olarak tatmin edici olduğunu söylemek güçtür. Buna karşın Manin 'nin fikri, her ne kadar tam oturmuş bir şekilde olmasa da, hem meta-fiziksel, hem de matematiksel bakımdan daha ikna edicidir. Manin 'nin fikrine geçmeden önce, daha önce bu yazı içinde söyleyeceğim şeyleri tekrarlayalım:

(a) Fiziksel ölçümlerde esas olarak rasyonel sayıları kullanmaktadır. Zira bu ölçüm esnasında, sabit birim ile ölçülen miktar arasındaki x gibi orantının yaklaşık bir değeri sözkonusudur. Artan hassasiyet ile tekrarlanan ölçümlerde, x değerine ($|.|_\infty$ anlamında) yaklaşan rasyonel sayılardan oluşan bir dizi elde edilmektedir. Zaten bu durum, rasyonel sayılardan oluşan Cauchy dizilerinden hareketle reel sayıları kuran Cantor Yönteminin temelidir. (Not: Bazı fizikçi arkadaşlarımız söyleyebilirler: "Biz ölçümlerde $a < x < b$ şeklindeki bir aralık belirtiyoruz". Fakat a ve b uç noktalarının rasyonel değerli olması gerektiğini, ve a veya b 'nin x 'in yaklaşık değeri olarak bakılabileceğini düşünürsek, bu sözün, yukarıda söylendiği ile aynı kapıya çıkacağı anlaşılır.)

(b) Q cisminin $|.|_\infty$ 'ye göre metriğinden başka, her p asal sayısına tekabül eden, $|.|_p$ valuasiyonuna göre p-adik metrik de vardır.

(c) $|.|_\infty$' ye göre Q 'nun kapanışı $\mathbf{R}$, $|.|_p$ 'ye göre ise Q_p dir.

Bu gözlemlere dayanarak, Manin 'nin ortaya attığı meta-fiziksel önermeleri, biraz basitleştirerek, şöyle ifade edebiliriz:

(I) Bilemediğimiz bir nedenle biz insanlar, $|.|_\infty$ valuasiyonuna göre metriği kullanmaya şartlanmışız. (Not: Onun içindir ki, biz her fiziksel olayı, Q 'nun $|.|_\infty$ 'ye göre kapanışı olan, $\mathbf{R}$ içinde düşünüp, incelemekteyiz.) Halbuki Q üzerinde p-adik metrik gibi başka metrikler de vardır, ve bunların gözönüne alınmaması haksızlıktır, "demokrasi" ilkesine aykırıdır. (Manin aynen böyle söylüyor!)).

(II) Evrenimiz, bilhassa Planck-altı bölgesi, adeliktir, yani Planck-altı bölgesinin modeli olarak A_Q adeller halkasının alınması gerekir. (Not : Manin 'ne göre Planck-altı bölgesi çok yüzlüdür, onun her bir yüzü, Q 'nun bir valuasiyonuna tekabül etmekte olup, bu yüz Q 'nun, sözkonusu olan valuasiyonuna göre, kapanışıdır. Şu halde Planck-altı bölgesinin R yüzünden başka p-adik yüzü de vardır. (I) önermesi gereğince, biz ancak R-yüzünü tasavvur edebiliriz, fakat p-adik yüzünü hayal bile edemeyiz. Ancak A_Q adeller halkasını bir model olarak seçerek, Planck-altı bölgesini analiz etme olanağını bulabiliriz.)

(III) Planck-altı bölgesinin yüzleri arasındaki bağıntılar tamamlayıcıdır (= "complementary"). (Not: Bir bağıntı yardımıyla Planck-altı bölgesinin bir yüzündeki durum, diğer yüzlerinkinden belirlenebilir. Örnekler aşağıdadır.)

Şimdi okurlarımız soracaktır: "Peki bu önermelerin faydası nedir?" veya "Bunu Planck-altı fiziğine uygulayabilir miyiz?". Bu sorulara kesin cevap vermek için herhalde zaman daha çok erken. Ancak bundan sonraki gelişmeler bu sorulara pozitif veya negatif cevaplar verebilir. Fakat en azından aşağıdakileri söylemek mümkündür. Bunun için bir örnekle başlayalım:

Herhangi bir a gibi sıfırdan farklı bir rasyonel sayı için, daha önce (∗) işaretiyle gösterdiğimiz bir bağıntı vardı:

(∗) $\prod_p |a|_p = 1$ (p, ∞ ve bütün asal sayılar üzerinde değişir.)

Bu bağıntı, (III) önermesinde bahsedilen "tamamlayıcı" bağıntıların tipik bir örneğidir. Gerçekten, bütün p asal sayıları için $|a|_p$ değerini bilirsek, $|a|_\infty$ değerini de bilebiliriz. Bu örneği fazla basit bulanlar için Manin 'nin verdiği başka bir örnek vereyim:

$SL_2(A_Q)/SL_2(Q)$ kompakt grubunun μ Haar ölçümünü

$$\int_{SL_2(A_Q)/SL_2(Q)} d\mu = 1$$

şartıyla normalize ettiğimizde, ve soldaki integrali her yüz üzerindeki integrallerin yardımıyla direkt hesapladığımızda

$$1 = \pi^2/6 \text{ (R-yüzünden) } \times \Pi_p(1-p^{-2}) \text{ (her } p\text{-adik yüzden)}$$

eşitliğini elde ediyoruz ki, bu da

$$\pi^2/6 = \Pi_p(1-p^{-2})^{-1} \quad (= \zeta(2)) \tag{**}$$

sonucunu verir (Euler formülü). (**) eşitliği, R-yüzündeki $\pi^2/6$ ile p–adik yüzündeki $1-p^{-2}$ gibi aritmetik ifadeleri arasında bir bağ kurmaktadır. Not olarak, π sayısını içeren sayısal ifadelerin genelde fiziksel karakter taşıdığına da işaret edelim.

Yukarıdaki az sayıda örneklerden hemen genelleştirmeye gitmemiz doğaldır ki çok tehlikelidir. Fakat bu örnekler, R-yüzündeki (bilinmeyen veya direkt ölçme olanağına sahip olmayan) fiziksel bir miktarın, p– adik yüzünde kolay hesaplanabileceği miktarlar tarafından ifade edilebileceği olasılığını göstermektedir. Daha doğrusu, direkt ölçülme imkanı olmayan Planck-altı bölgesinin (R-yüzünde bulunan) fiziksel bir miktarın, p-adik yüzündeki hesaplanabilen miktarlardan elde edilmesinin olanaksız olmayacağını, böylece, Manin 'nin fikrini kabul etmek suretiyle, Planck-altı Fiziğinin yapılabilme olasılığını hissettirmektedir.

Not: Yukarıda, basit olsun diye, A_Q adeller halkasını Planck-altı bölgesinin modeli olarak seçmiş bulunuyorum. Gerektiğinde, Q cisminden daha büyük bir cebrik sayı-cismi de seçilebileceğine işaret edeyim.

Manin 'nin ortaya attığı fikri kabaca "fiziksel olayları A_Q (veya gerektiğinde F gibi daha uygun cebrik sayı-cismi ile A_F) adeller halkasının aritmetiği içinde düşünmek" diyebiliriz. Bu da "aritmetik fizik" adının çıkışının sebebidir.

Böylece şimdiye kadar hiç bir zaman teorik fiziğin iş arkadaşı olarak kabullenmemiş olan sayılar teorisi, son günlerde en büyük yardımcısı gözü ile bakılmaya başlanmıştır.

Doğaldır ki Manin 'nin prensibinin bütün fizik topluluğunca kabullenmesi için daha biraz zamana ihtiyaç olacağı açıktır. Ancak bunun, 21. yüzyılın fizikte, özellikle Planck-altı fiziğinde, kesin bir yön vereceğinden eminim.

Daha önce Tate 'in tezinden bahsederken, K gibi bir cebrik sayı cismine ait A_K adeller halkasından harmonik analiz yolu ile Hecke L-fonksiyonlarının sistematik bir şekilde elde edilebileceğini söylemiştim. Özel olarak, A_Q adeller halkasından ise Riemann zeta-fonksiyonu ve Dirichlet L-fonksiyonları çıkmaktadır. Böyle olunca bir gün, Sicim Teorisi veya Planck-altı Fiziği ile ilgili olarak, Riemann zeta-fonksiyonu ve Dirichlet L-fonksiyonları kullanılmaya başlanmış olsa da, hiç şaşırmamamız gerekir. Bu durum, yazımın en başında belirttiğim Feza Bey' in "Biz fizikte zeta-fonksiyonu..." sözü ile birlikte, kendisinin ne kadar ileri görüşlü olduğunu göstermektedir.

4. 21. Yüzyıla Girerken

Yukarıda Cahit Bey ile ilgili bazı olayları sunarak, kendisinin zamanın en aktüel konuları (kongruens zeta-fonksiyonları için Riemann Hipotezi, sayı-cisimleri için Riemann-Roch Teoremi gibi) ile çok yakından ilgilendiğini, böylece 20. yüzyıl matematiğinin gidişi hakkında çok sağlam bir görüşe sahip olduğunu anlattım. Aynı zamanda aritmetik fiziğin bugünlerde güncel bir konu olduğundan