PTOLEMY (Batlamyus) TEOREMİ

Fikri Gökdal
Akdeniz Universitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Claudius Ptolemy (M. S. 150 civarında), Mısır'da yaşamış bir astronom ve matematikçidir. "Great Collection" adlı eserinde; astronomi ile ilgili, ustalıkla hazırlanmış orjinal hesap tabloları, Mezopotamyalı astronomlardan yaşadığı zamana ulaşmış bilgiler, trigonometri, çeşitli açıların gördüğü kirişlerin ölçüleriyle ilgili tablolar, küresel trigonometri ile ilgili başlangıç sayılabilecek bilgiler ve geometri teoremleri yer alır. (Bu eser, Tabit Bin Kurra (826-901) tarafından "Almagest" adı altında Arapça 'ya çevrilmiştir, çeviride Ptolemy adı, Batlamyus olarak geçer). Eserin bir kısmında, köşeleri bir çemberin noktaları olan bir dış bükey (konveks) dörtgenin, yani bir "kirişler dörtgeni" 'nin kenar ve köşegen uzunlukları arasında çok sade bir bağıntının bulunduğu iddia ve ispat edilmektedir. İddia ve ispat, Ptolemy 'ye aittir.

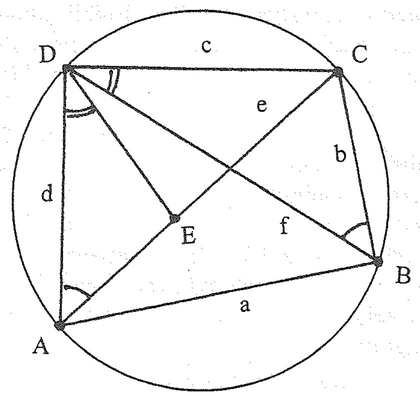
Ptolemy'nin verdiği ispatın dışında, zaman içinde bu teoremin değişik ispatları yapılmıştır. Bu yazıda teoremin dört farklı ispatını sunacağız. Özden uzaklaşmamak kaydıyla, bazı durumlarda ifadelerin uzamaması için kenar uzunluğu, köşegen uzunluğu yerine, sadece kenar, köşegen diyebilecek, $|AB|$ yerine AB, $m(\hat{A})$ yerine $\hat{A}=\alpha$, $\cdots$ yazabileceğiz.

Teorem (Ptolemy). Bir kirişler dörtgeninde; karşılıklı kenarların çarpımlarının toplamı, köşegenlerin çarpımına eşittir.

İspat. Kenar ve köşegenleri sırasıyla $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ ve $AC=e$, $BD=f$ ile gösterilmek üzere $ABCD$ bir kirişler dörtgeni ise,

$$a\,.\,c+b\,.\,d=e\,.\,f$$

olduğunu ispatlayacağız.



Şekil.1

DC yayını gören çevre açılar olduklarından, $D\hat{A}C=D\hat{B}C$ 'dir. $A\hat{D}B>B\hat{D}C$ kabul edilerek; AC üzerinde, $A\hat{D}E=B\hat{D}C$ sağlanacak biçimde alınan E noktası için (Şekil. 1) $(A.A)$ benzerlik teoremi gereğince,

$$\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{BDC}$$

olur ve buradan,

$$\frac{AE}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

ya da

$$\frac{AE}{b}=\frac{d}{f} \qquad (1)$$

elde edilir.

DA yayını gören çevre açılar olduklarından $D\hat{C}A=D\hat{B}A$ ve E noktasının seçilişinden dolayı da, $A\hat{D}B=E\hat{D}C$ 'dir. $(A.A)$ benzerlik teoremi gereğince,

$$\overset{\triangle}{ADB} \sim \overset{\triangle}{EDC}$$

olur ve buradan da,

$$\frac{AB}{EC} = \frac{DB}{DC}$$

ya da

$$\tfrac{a}{EC} = \tfrac{f}{c} \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) 'den,

$$\begin{aligned} bd + ac &= f.AE + f.EC \\ &= f(AE + EC)\ ; \end{aligned}$$

A, E, C doğrusal noktalar olduğundan $AE + EC = AC$ ve dolayısıyla,

$$b\ .\ d + a\ .\ c = f\ .\ e$$

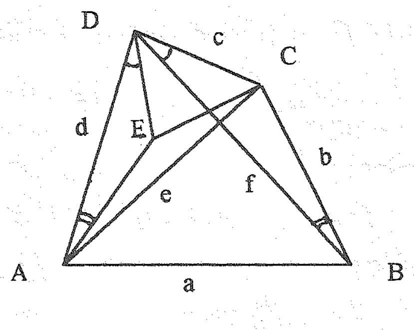
ya da

$$a\ .\ c + b\ .\ d = e\ .\ f$$

elde edilir.

(Karşıt) Teorem. Bir dış bükey (konveks) dörtgende; karşılıklı kenarların çarpımlarının toplamı, köşegenlerin çarpımına eşit ise, bu dörtgen bir kirişler dörtgenidir.

İspat.



Şekil.2

$ABCD$ dörtgeninde, $ac + bd = ef$ 'dir. Bu bağıntıyı sağlayan bir dörtgenin kirişler dörtgeni olmadığını kabul edelim. Bu durumda, $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$ ve $\widehat{DAE} = \widehat{DBC}$ eşitliklerini sağlanacak biçimde alınan E noktası için, (Şekil 2.) $(A.A)$ benzerlik teoremi gereğince, $\overset{\triangle}{DAE} \sim \overset{\triangle}{DBC}$ olur ve buradan,

$$\tfrac{DA}{DB} = \tfrac{AE}{BC} = \tfrac{DE}{DC};\ \tfrac{d}{f} = \tfrac{AE}{b} \qquad (3)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$\tfrac{DA}{DB} = \tfrac{DE}{DC}$ ve $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$ olduğundan (K. A. K) benzerlik teoremi gereğince, $\overset{\triangle}{ADB} \sim \overset{\triangle}{EDC}$ 'dir. Buradan da

$$\tfrac{DB}{DC} = \tfrac{AB}{EC};\ \tfrac{f}{c} = \tfrac{a}{EC} \qquad (4)$$

elde edilir. (3) ve (4) 'ten

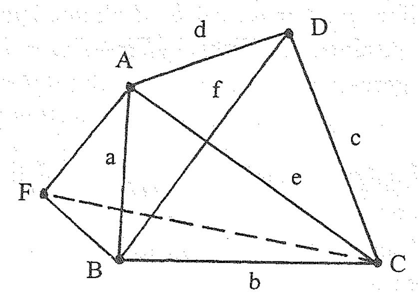
$$a\ .\ c + b\ .\ d = (AE + EC)\ .\ f$$

ve "verilen" 'den dolayı da

$$a\ .\ c + b\ .\ d = e\ .\ f$$

'dir. Dolayısıyla, $AE + EC = AC$ olur, yani E noktası, AC üzerindedir. Bu nedenle, $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ olur. DC doğru parçasını gören eş açıların köşeleri oldukları için de A, B noktaları D ve C 'den geçen bir çember yayı üzerinde bulunur. Öyleyse, $ac + bd = ef$ bağıntısını sağlayan bir dış bükey dörtgen, kirişler dörtgenidir.

II. İspat.



Şekil.3

Dış bükey bir $ABCD$ dörtgeni alınıp, $\overset{\triangle}{ABF} \sim \overset{\triangle}{ADC}$ olacak biçimde $\overset{\triangle}{ABF}$ üçgeni çizildiğinde (Şekil.3)

$$\frac{AF}{AC}=\frac{AB}{AD}=\frac{BF}{DC}$$

ya da

$$\frac{AF}{e}=\frac{a}{d}=\frac{BF}{c}$$

olur. Buradan,

$$AF=\frac{a\,.\,e}{d} \text{ ve } BF=\frac{a\,.\,c}{d} \qquad \text{(II.1)}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $F\hat{A}C=B\hat{A}D$ ve $\frac{AF}{AB}=\frac{AC}{AD}$ olduğundan (K. A. K) benzerlik teoremi gereğince $\overset{\triangle}{FAC}\sim\overset{\triangle}{BAD}$ olur, buradan da

$$\frac{FC}{BD}=\frac{AC}{AD} \text{ ve dolayısıyla } FC=\frac{e\,.\,f}{d} \quad \text{(II. 2)}$$

elde edilir. Böylece, $\overset{\triangle}{FBC}$ üçgeninde,

$$BF=\frac{a\,.\,c}{d},\ BC=\frac{b\,.\,d}{d},\ FC=\frac{e\,.\,f}{d},\ \text{(II. 3)}$$

yani kenarların $a\,.\,c$, $b\,.\,d$, $e\,.\,f$ ile orantılı olduğu anlaşılır. Üçgen eşitsizliğinden, $\overset{\triangle}{FBC}$ üçgeninde

$$FC<FB+BC$$

'dir. (II. 3) 'teki değerler yerlerine yazıldığında,

$$e\,.\,f<a\,.\,c+b\,.\,d$$

elde edilir. $e\,.\,f=a\,.\,c+b\,.\,d$ olması için F, B, C noktalarının doğrusal ($FB+BC=FC$) olması gerekir ve yeter. Bu noktalar doğrusal ise,

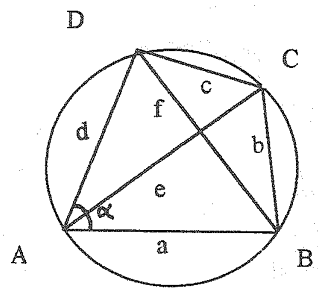
$$F\hat{B}A+A\hat{B}C=180^\circ=A\hat{D}C+A\hat{B}C$$

olur ki bu, $ABCD$ dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olmasını ve

$$F\hat{B}A+A\hat{B}C=A\hat{D}C+A\hat{B}C=180^\circ,$$

yani, $ABCD$ bir kirişler dörtgeni ise, F, B, C doğrusal noktalar olur ki bu da $a\,.\,c+b\,.\,d=e\,.\,f$ olmasını gerektirir. (Bu ispatta teoremin kendisini ve karşıtını görüyoruz.)

III. İspat.



Şekil.4

a, b, c, d kenar uzunlukları, e ve f de köşegen uzunlukları olmak üzere bir kirişler dörtgeninde $D\hat{A}B=\alpha$ ise, kosinüs teoreminden, (Şekil.4)

$$f^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha \qquad \text{(III. 1)}$$

ve

$$f^2=b^2+c^2+2bc\cos\alpha \qquad \text{(III. 2)}$$

elde edilir. (III.1) ve (III. 2) sırasıyla bc ve ad ile çarpılıp taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}(ad+bc)f^2 &= (a^2+d^2)bc+(b^2+c^2)ad\\ &= (ab+cd)(ac+bd)\end{aligned}$$

ve buradan

$$f^2=\frac{ab+cd}{ad+bc}.(ac+bd), \qquad \text{(III.3)}$$

benzer biçimde de,

$$e^2=\frac{ad+bc}{ab+cd}.(ac+bd) \qquad \text{(III.4)}$$

bulunur. (III.3) ve (III.4) eşitlikleri taraf tarafa çarpıldığında,

$$e\,.\,f=a\,.\,c+b\,.\,d \qquad \text{(III.5)}$$

ve (III.4) ile (III.3) eşitlikleri taraf tarafa bölündüğünde,

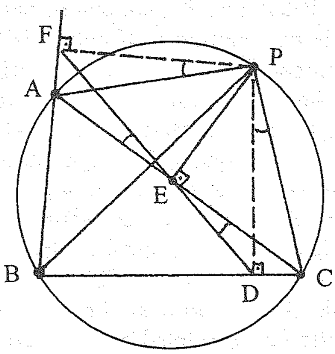
$$\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{ab+cd} \qquad \text{(III.6)}$$

elde edilir.

Bir başka ispat, Simson doğrusundan yararlanarak yapılmıştır:

("ABC bir üçgen; P bu üçgenin çevrel çemberi üzerinde bir nokta olmak üzere P noktasından sırasıyla BC, CA ve AB doğrularına indirilen dikmelerin ayakları D, E ve F ise, bu üç nokta doğrusaldır." iddiasındaki D, E, F noktalarının üzerinde bulundukları doğruya Simson doğrusu denir. Bu iddianın bir ispatı:

$BDPF$, $BCPA$, $DCPE$ ve $AEPF$ dörtgenlerinin her biri bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla,



Şekil.5

$F\hat{P}D = 180° - \hat{B} = A\hat{P}C$ 'dir. Buradan $A\hat{P}F = D\hat{P}C$ elde edilir. $D\hat{E}C = D\hat{P}C = A\hat{P}F = A\hat{E}F$ eşitlikleri D, E, F 'nin doğrusal noktalar olduğunu gösterir.)

IV. İspat. Şekil.5 'teki ABC üçgeninin kenarları a, b, c ve çemberin yarıçapı R olmak üzere. şekilden

$$FE = AP.\ \sin A = AP.\ \tfrac{a}{2R} \qquad \text{(IV.1)}$$

$$ED = CP.\ \sin C = CP.\ \tfrac{c}{2R} \qquad \text{(IV.2)}$$

$$DF = BP.\ \sin B = BP.\ \tfrac{b}{2R} \qquad \text{(IV.3)}$$

bulunur. D, E, F noktaları doğrusal olduğundan, $FD = FE + ED$ 'dir.

(IV.1), (IV.2), (IV.3) ve bu eşitlikten

$$a\,.\,AP + c\,.\,CP = b\,.\,BP$$

elde edilir. Bu eşitlikteki a, CP, AP, c ve AC, BP; $ABCP$ kirişler dörtgeninin kenar ve köşegen uzunluklarıdır.

$ABCD$ kirişler dörtgeninde, $a = c$ ve $b = d$ ise, bu durumda $e = f$ olacağından

$$e^2 = a^2 + b^2 \text{ (Pisagor bağıntısı)}$$

elde edilir.

Ptolemy teoreminin sadeliğine uygun, ilgilenip zevk almanız dileğiyle üç tane problem sunuyoruz:

(1) $ABCD$ bir kare; F, G ve E sırasıyla AB, AC ve AD doğru parçalarının bir iç noktası olmak üzere (EAF) çemberi G noktasından geçiyorsa,

$$AF + AE = \sqrt{2}\,.\,AG$$

olduğunu ispatlayınız.

(2) ABC bir eşkenar üçgen ve D noktası bu üçgenin çevrel çemberinin BC (küçük) yayının bir iç noktası ise,

$$DA = DB + DC$$

olduğunu ispatlayınız.

(3) İkinci soruda verilenler aynı kalmak üzere AD doğrusu BC kenarını E noktasında kesiyorsa,

$$\frac{1}{DE} = \frac{1}{DB} + \frac{1}{DC}$$

olduğunu ispatlayınız.

Bu yazı çeşitli geometri ve matematik tarihi kitapları kaynak alınarak hazırlanmıştır.