PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.166. Rakamları içinde hiç sıfır bulunmayan ve kendi rakamları toplamına bölünen 100 basamaklı bir sayı bulunuz.

A.167. Asal olduğu bilinen $2^{11213}-1$ sayısının onluk sayı sistemindeki yazılımında kaç rakam bulunduğunu belirleyiniz. (İpucu: $\log_{10} 2 = 0,30103\ldots$)

A.168. Aşağıdaki denklemin tüm gerçel çözümlerini bulunuz:

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{2-2x}=1$$

A.169. Düzlem üzerinde rasgele 1998 tane nokta işaretlenmiştir. Bu noktaların tam 1001 tanesini içinde bulunduran bir dairenin varlığını kanıtlayınız.

A.170. Düzlem üzerinde rasgele 1998 tane nokta işaretlenmiştir. Düzlem üzerinde, bu noktaların tam 1001 tanesini "sağında" bulunduran bir doğrunun varolduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.166. Herhangi bir $2k$ ($k \in N$) çift sayısı verilsin. Bu takdirde her m doğal sayısı için, m ile aralarında asal olan ve farkları $2k$ 'ya eşit olan sonsuz çoklukta doğal sayı ikililerinin bulunduğunu gösteriniz.

Y.167.

$$|\frac{1}{2}.\sin ax+\frac{1}{3}.\sin bx+\frac{1}{6}.\sin cx| \geq \sqrt{1998}.|\sin x|$$

eşitsizliği her $x \in (0, 10^{-10})$ için sağlanırsa, $a^2+b^2+c^2 \geq 1998$ olacağını kanıtlayınız.

Y.168. $ABCD$ dörtyüzlüsünün çevrel küresinin merkezi O; BC, CA, AB kenarlarının orta noktaları L, M, N ve $AB+BC=AD+CD$, $BC+CA=BD+AD$, $CA+AB=CD+BD$ 'dir. $L\hat{O}M=M\hat{O}N=N\hat{O}L$ olduğunu ispat ediniz.

Y.169. Uzayda 1998 tane nokta rasgele işaretlenmiştir. Bu noktaların tam 1001 tanesini içinde bulunduran bir yuvarın varlığını kanıtlayınız.

Y.170. Uzayda 1998 tane nokta rasgele işaretlenmiştir. Bu noktalardan tam 1001 tanesini bir tarafında bulunduran bir düzlemin varlığını kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.156. (Soru dergide eksik basılmış, doğrusu:) $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$ olmak üzere kenar uzunlukları a, b, c olan üçgenler içinde en büyük alana sahip olan üçgenin alanı kaç olabilir?

Çözüm. İki kenar uzunluğu $0 \leq a \leq 1$, $1 \leq b \leq 2$ eşitsizliklerini sağlayan üçgenler içinde en büyük alana sahip olanı dik kenarları 1 ve 2 olan dik üçgendir. Bu üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu $c=\sqrt{5}$ olup $2 \leq c \leq 3$ koşulunu sağlıyor. Böylece problemdeki sorunun yanıtı 1 'dir.

A.157. 11111 'den 99999 'a kadar tüm beş basamaklı sayılar, her kart üzerinde birer sayı olmak üzere yazılmış ve bu kartlar rasgele (gelişigüzel) biçimde yanyana dizilmiştir. Bu şekilde elde edilen 444445 basamaklı sayının 3 'ün bir kuvveti olamayacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Problemde gösterilen şekilde oluşturulan her sayının 11111 ile bölüneceğini (ve dolayısıyla, 3 'ün bir kuvveti olamayacağını) gösterelim.

$10^5 = 9.11111+1$ olmasından dolayı, sözkonusu 444445 basamaklı sayının 11111 'e bölünmesinden elde edilen kalan, kartlar üzerinde yazılmış tüm 5 basamaklı sayıların toplamının 11111 'e bölünmesinden elde edilen kalana eşit olacaktır. Kartlar üzerinde yazılmış tüm sayılar toplamının (ki bu sayı $\frac{11111+99999}{2}(10^5-1)$ 'e eşittir) 11111 'e bölündüğünü kanıtlamayı sizlere bırakıyoruz.

A.158. $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında α ve β sayıları için

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Problemin koşulundan

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta)$$

olduğu görülür. $\sin\alpha > \cos\beta$ ve $\cos\alpha > \sin\beta$ olamaz. Çünkü aksi halde $1 > 1$ çelişkisi elde edilir ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden). Benzer şekilde, $\sin\alpha < \cos\beta$ ve $\cos\alpha < \sin\beta$ eşitsizlikleri de sağlanamaz. α ve β 'nın $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında bulunduklarını da gözönüne alırsak yalnız bir seçenek kalır: $\sin\alpha = \cos\beta$ ve $\cos\alpha = \sin\beta$.

A.159. $2^{\sqrt[12]{1998}} + 2^{\sqrt[4]{1998}} > 2^{\sqrt[6]{1998}+1}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm. Aritmetik-geometrik ortalamalar eşitsizliğini ardarda uygularsak

$$2^{\sqrt[12]{1998}} + 2^{\sqrt[4]{1998}} \geq 2.2^{\frac{\sqrt[12]{1998}+\sqrt[4]{1998}}{2}}$$

$$\geq 2.2^{(1998^{\frac{1}{2}}.1998^{\frac{1}{4}})} = 2.2^{\sqrt[6]{1998}} = 2^{\sqrt[6]{1998}+1}$$

olur.

A.160. Tüm köşegen ve kenar uzunlukları rasyonel sayılar olan konveks $ABCD$ dörtgeni veriliyor. Köşegenlerin kesişim noktası O olmak üzere, AO doğru parçasının uzunluğunun bir rasyonel sayı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $A\hat{B}C = \alpha$, $A\hat{B}D = \alpha_1$, $D\hat{B}C = \alpha_2$ olsun. AOB ve BOC üçgenlerine "Sinüs Teoremi" 'ni uygularsak

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AO}{AB} \cdot \frac{BC}{OC} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

elde ederiz. AB ve BC, problemin varsayımına göre, rasyonel olduklarından, problemin iddiasını kanıtlamak için $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2$ oranının rasyonel olduğunu göstermek yeter. "Kosinüs Teoremi" 'ni ve kenar uzunlukları ile köşegenlerin rasyonel olmasını kullanarak $\cos\alpha$, $\cos\alpha_1$ ve $\cos\alpha_2$ sayılarının rasyonelliğini gösterebiliriz (örneğin, $\cos\alpha = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}$ vs.). Öte yandan, $\cos\alpha = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2$ formülünden $\sin\alpha_1\sin\alpha_2$ sayısının ve $(\sin\alpha_2)^2 = 1-(\cos\alpha_2)^2$ formülünden de $(\sin\alpha_2)^2$ sayısının rasyonel olması çıkar. İki rasyonel sayının oranı da rasyonel olacağından

$$\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{(\sin\alpha_2)^2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

sayısı da rasyonel olacaktır.

Y.156. n herhangi bir doğal sayı olmak üzere,

$$n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+37,\ n+38$$

dizisinde, rakamları toplamı 11 ile bölünen bir sayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Verilen sayıların ilk 20 'si içinde son rakamı sıfır olan ikisi vardır. Bu iki sayıdan en az birinde sıfırdan bir önceki rakam 9 'dan küçüktür. Bu sayıya K ve K 'nın rakamları toplamına S diyelim. Bu takdirde

$$K,\ K+1,\ K+2,\ \ldots,\ K+9,\ K+19$$

sayıları verilen 39 sayının içinde bulunacaktır ve rakamları toplamı, sırası ile,

$$S,\ S+1,\ S+2,\ \ldots,\ S+9,\ S+10$$

olacaktır. Sonuncu 11 tane ardışık sayının en az birinin 11 'e bölündüğü açıktır.

(**Çözenler:** *Celalettin Orhan, Alper Çay.*)

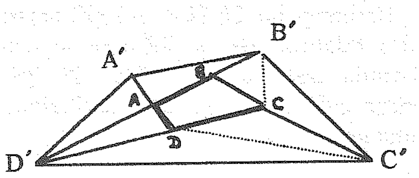
Y.157. Konveks $ABCD$ dörtgeninin AB, BC, CD ve DA kenarlarının uzantıları üzerinde

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DA}$$

sağlanacak biçimde B', C', D', A' noktaları alınmıştır. $A'B'C'D'$ dörtgeninin alanının $ABCD$ dörtgeninin alanının 5 katı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm.



Şekilden,

$$A(A\overset{\triangle}{B}C) = A(C\overset{\triangle}{B}B') = A(C\overset{\triangle}{B'}C').$$

Buradan, $A(B\overset{\triangle}{B'}C') = 2A(A\overset{\triangle}{B}C)$ olduğu çıkar. Benzer şekilde,

$A(C\overset{\triangle}{C'}D') = 2A(B\overset{\triangle}{C}D)$; $A(D\overset{\triangle}{D'}A) = 2A(C\overset{\triangle}{D}A)$; $A(A\overset{\triangle}{A'}B') = 2A(D\overset{\triangle}{A}B)$

olur. Elde edilen dört eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$A(B\overset{\triangle}{B'}C')+A(C\overset{\triangle}{C'}D')+A(D\overset{\triangle}{D'}A')+A(A\overset{\triangle}{A'}B')$$
$$= 2[A(A\overset{\triangle}{B}C) + A(B\overset{\triangle}{C}D)$$
$$+ A(C\overset{\triangle}{D}A) + A(D\overset{\triangle}{A}B)] = 4A(AB\overset{\triangle}{C}D) \equiv 4S$$

Böylece, $A(A'\overset{\triangle}{B'}C'D') = 4S + S = 5S$.

(**Çözenler:** *Barış Buran, Selami Güngör, Ümit Arıkan, Özkan Koral, Cihan Altay, Cemal Özboğa, Temel Taşkın, Celalettin Orhan, Serkan Albayrak, Çetin Kesikçi, Murat Aygen, Hasan Karabıyık.*)

Y.158. $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$ sayısının tam kısmının 1998 ile bölünmesinden kalan nedir?

Çözüm. Önce her n doğal sayısı ve $-1 < \beta < 0$ olan her β için

$$\frac{(n+1)^{\beta+1}-n^{\beta+1}}{\beta+1} < n^{\beta} < \frac{n^{\beta+1}-(n-1)^{\beta+1}}{\beta+1} \qquad (*)$$

eşitsizliklerinin sağlanacağını gösterelim.

$0 < \beta + 1 < 1$ olduğundan, Bernoulli eşitsizliği kullanılarak

$$(1+\frac{1}{n})^{\beta+1} < 1 + \frac{\beta+1}{n},$$

$$(1-\frac{1}{n})^{\beta+1} < 1 - \frac{\beta+1}{n}$$

olduğu görülür ve bunlar $n^{\beta+1}$ ile çarpılarak

$$(n+1)^{\beta+1} < n^{\beta+1} + (\beta+1)n^{\beta},$$

$$(n-1)^{\beta+1} < n^{\beta+1} - (\beta+1)n^{\beta}$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten $(*)$ eşitsizliği çıkar.

Şimdi $(*)$ eşitsizliğinde $\beta = -\frac{1}{3}$ ve sıra ile $n = 4, 5, \ldots, 1000000$ konularak taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1000001^{2/3} - 4^{2/3}}{2/3} < \alpha < \frac{100000^{2/3} - 3^{2/3}}{2/3}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan,

$$\frac{3}{2}1000001^{2/3} > \frac{3}{2}1000000^{2/3} = \frac{3}{2}10000 = 15000$$

ve

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54} < 4\ ;\ \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} > \frac{3}{2}\sqrt[3]{8} = 3$$

eşitliklerinden

$$15000 - 4 < \alpha < 15000 - 3$$

eşitsizliği ve dolayısıyla $[\alpha] = 14996$ olduğu görülür. 14996 'yı 1998 ile bölerek kalanı bulmayı okuyucularımıza bırakıyoruz.

(**Çözenler:** *Cemal Özboğa, Celalettin Orhan, Ahmet Bozkurt.*)

Y.159. Alfa burcunun 1001 gezegenden ibaret bir gezegenler sisteminin her gezegeninde bir astronom, kendi gezegenine en yakın olan gezegeni gözlemektedir. (Gezegenler birbirinden farklı uzaklıktalar.) Astronomların hiç birinin gözlemediği bir gezegenin varlığını kanıtlayınız.

Çözüm. Genel halde, $2n + 1$ tane gezegen olduğu durumu ele alalım ve problemin hipotezini tümevarımla ispatlayalım.

$n = 1$ için iddianın doğru olduğunu görmek zor değildir. $n = k$ için iddianın doğruluğunu varsayarak $n = k + 1$ için ispatlayalım. Bunun için $2(k + 1) + 1 = 2k + 3$ gezegen içinde birbirine en yakın olan iki gezegeni ele alalım. Bu gezegenlerdeki astronomlar biri diğerinin gezegenini gözleyecektir. Bundan dolayı bu iki gezegeni gözardı edebiliriz. Geriye kalan $2k + 1$ tane gezegen içinde bir tanesinin hiç kimse tarafından gözlenmediği ise tümevarım varsayımıdır.

Y.160. Alanı S ve çevre uzunluğu P olan konveks dörtgenin içine, yarıçapı $\frac{S}{P}$ olan bir daireyi (dışarıya taşmaksızın) yerleştirmek mümkündür; kanıtlayınız.

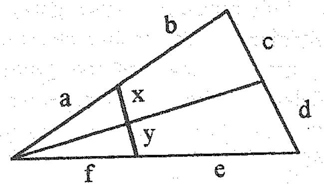
Çözüm. Problemi, alanı S ve çevre uzunluğu P olan herhangi konveks n-gen için çözelim.

Çokgenin kenar uzunlukları $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olsun. Şarta göre, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = P$ dir. Alanı S ve taban uzunluğu P olan dikdörtgen düşünelim. Onun yüksekliği $\frac{S}{P}$ olacaktır. Şimdi, bu dikdörtgeni, taban uzunlukları $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olan n tane dikdörtgene parçalayalım. Elde edeceğimiz her bir küçük dikdörtgeni, taban çokgenin uygun kenarı ile çakışmak üzere çokgenin içine yerleştirelim. Bu dikdörtgenlerin bazıları birbiriyle kesişecektir ve hatta bazılarının bir kısmı çokgenin dışına taşacaktır. Dikdörtgenlerin alan toplamları çokgenin alanına eşit olduğundan, çokgen üzerinde hiç bir dikdörtgen tarafından örtülmeyen noktalar bulunacaktır. İşte, bu noktaların her biri problemin iddiasını sağlayan $\frac{S}{P}$ yarıçaplı dairenin merkezi olarak alınabilir.

OKURLARIMIZDAN PROBLEMLER

Okurlarımızdan gelen iki ilginç problemi sizlerle paylaşmak istiyoruz. Sanırız bunları çözmeye değer bulacaksınız.

(A) *Emre Bozdurgut - Kadıköy/İSTANBUL*

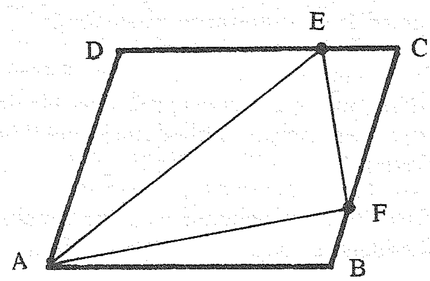


Yukarıda görülen şekil için

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{d} \cdot \frac{f+e}{a+b} \cdot \frac{a}{f}$$

olduğunu kanıtlayınız.

(B) *Hasan Kartal - Zeytinburnu/İSTANBUL*



Bu $ABCD$ paralelkenarında $[DC]$ kenarı üzerinde bir E noktası ve $[BC]$ kenarı üzerinde bir F noktası alalım. Bu durumda

$$\frac{Alan(\overset{\triangle}{AEF})}{Alan(ABCD)} = \frac{1}{2} - \frac{|DE|.|BF|}{|DC|.|BC|}$$

olduğunu kanıtlayınız.