39. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI

Halil İbrahim Karakaş
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

---

39. Uluslararası Matematik Olimpiyadı 10-21 Temmuz 1998 tarihlerinde Tayvan 'ın başkenti Taipei 'de yapıldı. 76 ülkeden 419 yarışmacının katıldığı olimpiyatta ülkemizi Kazım Büyükboduk, M. Bumin Yenmez, Duru Türkoğlu, Onur Doğan, Serdar Pehlivanoğlu ve Melih Onuş 'tan oluşan ulusal takımımız temsil etti. Takım lideri olarak, aynı zamanda Uluslararası Olimpiyat Komitesi Danışma Kurulu (IMO - Advisory Board) üyesi olan Semih Koray, lider yardımcısı olarak bu satırların yazarı Halil İbrahim Karakaş ve gözlemci olarak Aytek Erdil görev yaptılar. Ulusal Takımımız, bu satırların yazarı ile 12 Temmuz 1998 Pazar günü İstanbul'dan hareket ederek Dubai - Singapur üzerinden 13 Temmuz 1998 Pazartesi akşamı Taipei 'ye ulaştı. Hava alanında bizi rehberimiz, National Normal Taiwan University - Türkoloji bölümü öğrencisi olan ve kendisine ikinci ad olarak "Yasemin" adını seçen H. Y. Chou karşıladı. Takım liderimiz Semih Koray ve gözlemcimiz Aytek Erdil üç gün önce Tayvan 'a ulaşmışlardı. Ancak, olimpiyat kurallarına göre onları sınav bitimine kadar göremeyecektik.

Sınavlar, yazılı olarak birincisi 15 Temmuz 1998 Çarşamba günü, ikincisi 16 Temmuz 1998 Perşembe günü olmak üzere her biri 4,5 saat süren 3 'er soruluk iki oturumda yapıldı. Takımımız, 2 gümüş ve 4 bronz madalya kazandı ve ülke sıralamasında 17. sırayı aldı. Bu, takımımızın olimpiyatlarda bu yıla kadar aldığı en başarılı sonuç olmuştur. Gelecek yıllarda daha başarılı sonuçlar alınmasını umuyor ve diliyoruz.

38. Uluslararası Matematik Olimpiyadı ile ilgili olarak "Matematik Dünyası" 'nın 7. cilt, 2. sayısındaki yazımızda ayrıntıların ve anıların anlatımını takım mensuplarına bırakmıştım. Onlar bu görevi yerine getirmediler. 39. Olimpiyadın ayrıntılarını ve anılarını anlatmayı yine takım mensuplarına bırakıyorum (takım mensuplarından birinin "ben yazarım" dediğini de belirtmek istiyorum) ve olimpiyatta sorulan 6 soruyu ve çözümlerini veriyorum. Burada verilen çözümlerden farklı çözümler bulunabileceğini belirtmeye gerek yoktur.

Sevgili okurlarımız! Soruları okuduktan sonra, çözümlere bakmadan önce, her soruyu kendiniz çözmeye çalışınız. Bunun için mümkün olduğunca çok zaman ayırınız. Kolay gelsin ...

İşte 39. Uluslararası Matematik Olimpiyadında sorulan sorular ...

BİRİNCİ GÜN SINAV SORULARI

Soru 1. $ABCD$ konveks dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine dik olup, AB ve DC kenarları paralel değildir. AB ve DC 'nin orta dikmelerinin kesiştiği P noktasının $ABCD$ 'nin iç bölgesinde yer aldığı bilinmektedir. $ABCD$ 'nin bir kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter koşulun ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olması olduğunu gösteriniz.

Soru 2. Bir yarışmada, $b \geq 3$ bir tek sayı olmak üzere, a yarışmacı ve b hakem bulunmaktadır. Her hakem her yarışmacıyı ya "başarılı" ya da "başarısız" olarak değerlendiriyor. k aşağıdaki özelliğe sahip bir sayı olsun: Herhangi iki hakemin en çok k yarışmacı hakkındaki değerlendirmeleri çakışmaktadır.

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 3. Her pozitif n tamsayısı için, $d(n)$ ile n 'nin (1 ve n dahil olmak üzere) bölenlerinin sayısını gösterelim.

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

olmasını sağlayacak biçimde bir n sayısının bulunduğu tüm pozitif k tamsayılarını bulunuz.

İKİNCİ GÜN SINAV SORULARI

Soru 4. ab^2+b+7 'nin a^2b+a+b 'yi bölmesini sağlayan tüm (a,b) pozitif tamsayı çiftlerini bulunuz.

Soru 5. I ile, ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezini gösterelim. ABC 'nin iç çemberinin BC, CA ve AB kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla K, L ve M olsun. B 'den geçen ve MK 'ya paralel olan doğru, LM ve LK doğrularını sırasıyla R ve S noktalarında kesiyor. $\angle RIS$ 'nin bir dar açı olduğunu gösteriniz.

Soru 6. N pozitif tamsayılar kümesini göstersin. N 'den N 'ye giden ve N 'ye ait her s, t için

$$f(t^2f(s)) = s(f(t))^2$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarını ele alalım. $f(1998)$ 'in alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜMLER

Soru 1 'in Çözümü. AC ve BD 'nin kesim noktası E olsun. Simetriden, P noktasının $\overset{\triangle}{ABE}$ üçgeni içinde olduğunu kabul edebiliriz (Şekilden izleyiniz).

P 'den AC ve BD 'ye inilen dikmelerin ayakları sırasıyla R ve S olsun. Köşeleri X, Y, Z olan üçgenin alanını $[XYZ]$ ile gösterelim. $|PA| = |PB|$ ve $|PD| = |PC|$ olduğunu kullanmadan dahi $[ABP]$ ve $[CDP]$ 'yi aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$2[ABP] = 2[ABE] - 2[PAE] - 2[PBE]$$

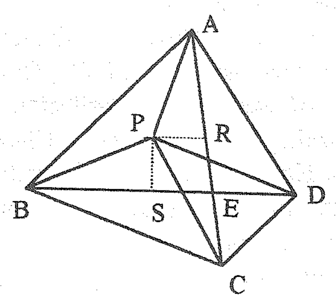
$$= (|AR| + |PS|)(|BS| + |PR|) - (|AR| + |PS|)|PR| - (|BS| + |PR|)|PS|$$

$$= |AR||BS| - |PR||PS|\,,$$

$$2[CDP] = 2[CDE] + 2[PCE] + 2[PDE]$$

$$= (|CR| - |PS|)(|DS| - |PR|) + (|CR| - |PS|)|PR| + (|DS| - |PR|)|PS|$$

$$= |CR||DS| - |PR||PS|\,.$$



Buradan,

$$2([ABP] - [CDP]) = |AR||BS| - |CR||DS| \qquad (*)$$

elde edilir. Şimdi, $|PA| = |PB|$ ve $|PC| = |PD|$ olduğunu gözönüne alalım. Eğer $ABCD$ bir kirişler dörtgeni ise, iç teğet çemberin merkezi P olmalıdır. Dolayısıyla, R ve S, sırasıyla, AC ve BD 'nin orta noktalarıdır. Böylece, $|AR| = |CR|$ ve $|BS| = |DS|$ olup $(*)$ 'dan $[ABP] = [CDP]$ olduğu görülür. Karşıt olarak, eğer $[ABP] = [CDP]$ ise, yine $(*)$ 'dan $|AR||BS| = |CR||DS|$ olur. Eğer $|PA| \neq |PC|$ olsaydı, simetriden $|PA| > |PC|$ varsayılabilir ve buradan $|AR| > |CR|$ elde edilebilirdi; ayrıca bu durumda $|PB| > |PD|$ olacağından $|BS| > |DS|$ elde edilebilirdi. Bunun sonucu olarak $|AR||BS| > |CR||DS|$ eşitsizliği ortaya çıkardı ki, bu bir çelişkidir. O halde, $|PA| = |PC|$ 'dir ve A, B, C, D noktaları P

noktasından eşit uzaklıkta, yani, $ABCD$ bir kirişler dörtgenidir.

Soru 2 'nin Çözümü. Tam $\binom{b}{2}$ hakem ikilisi bulunduğundan ve her bir ikili en çok k yarışmacı için aynı değerlendirmeyi yapacağından, çakışan değerlendirmelerin sayısı en çok $k\binom{b}{2}$ 'dir. Her $i = 1, 2, \ldots, a$ için i - inci yarışmacıyı "başarılı" bulan hakemlerin sayısı x_i, "başarısız" bulan hakemlerin sayısı da y_i olsun. Böylece, her $i = 1, 2, \ldots, a$ için $x_i + y_i = b$ 'dir. Bu gösterimle, i-inci yarışmacı için değerlendirmeleri çakışan hakem ikililerinin sayısı

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - (x_i + y_i)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[(b-1)^2 - 1]$$

olur. b sayısı tek olduğundan yukarıdaki eşitsizlik,

$$\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \geq \frac{1}{4}(b-1)^2$$

olarak ifade edilebilir. Buradan,

$$k\binom{b}{2} \geq \sum_{i=1}^{a}\left[\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2}\right] \geq \frac{a(b-1)^2}{4}$$

ve sonuç olarak

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

olduğu görülür.

Soru 3 'ün Çözümü. n bir pozitif tamsayı, n 'nin asal çarpanlarına ayrılışı

$$n = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots p_r^{\alpha_r - 1}, \quad \alpha_i \geq 1$$

olsun. Bu durumda,

$$d(n) = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$$

$$d(n^2) = (2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1)\ldots(2\alpha_r - 1)$$

olacağından, eğer

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{(2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1)\ldots(2\alpha_r - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r} = k$$

tamsayısı ise, k 'nın bir tek sayı olması gerekir. Şimdi, bütün pozitif tek tamsayıların bu özelliğe sahip olduğunu (tümevarımla) göreceğiz. $k = 1$ için durum açıktır. Tümevarımı kolaylaştırmak için şöyle bir tanım yapacağız: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ pozitif tek tamsayılar olmak üzere

$$\frac{(2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1)\ldots(2\alpha_r - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}$$

biçiminde yazılabilen bir rasyonel sayıya "iyi sayı" diyelim. Böylece, amacımız tüm pozitif tek tamsayıların "iyi sayı" olduğunu göstermektir. Önce iki iyi sayının çarpımının yine bir iyi sayı olduğuna dikkat edelim. Şimdi, $k > 1$ olmak üzere k dan küçük tüm pozitif tek tamsayıların iyi sayı olduğunu kabul edelim (tümevarım hipotezi). $t \geq 1$ ve s tek olmak üzere

$$k = 2^t s - 1$$

olsun. Burada, $s < k$ olduğundan, s bir iyi sayıdır. Eğer $k = \frac{k}{s}$ 'nin de bir iyi sayı olduğunu gösterebilirsek, $\frac{k}{s}s$ bir iyi sayı olur ve iddiamız kanıtlanmış olur. α_1 sayısını daha sonra belirlemek üzere

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 - 1$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_2 - 1 = 2^2\alpha_1 - 2 - 1$$

$$\vdots$$

$$\alpha_t = 2\alpha_{t-1} - 1 = 2^{t-1}\alpha_1 - 2^{t-2} - \ldots - 1$$

$$= 2^{t-1}\alpha_1 - 2^{t-1} + 1$$

alalım ve

$$u = \frac{(2\alpha_1 - 1)(2\alpha_2 - 1)\dots(2\alpha_t - 1)}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t}$$

$$= \frac{2\alpha_t - 1}{\alpha_1} = \frac{2^t\alpha_1 - 2^t + 1}{\alpha_1}$$

kesirini düşünelim. Eğer $\alpha_1 = (2^t - 1)s$ seçilirse,

$$u = \frac{2^t(2^t-1)s - (2^t-1)}{(2^t-1)s} = \frac{2^ts - 1}{s} = \frac{k}{s}$$

olduğu görülür. O halde $\frac{k}{s}$ bir iyi sayıdır ve istenilen kanıtlanmıştır.

Soru 4 'ün Çözümü. Eğer ab^2+b+7 sayısı a^2b+a+b sayısını bölüyorsa

$$b(a^2b+a+b) - a(ab^2+b+7) = b^2 - 7a$$

sayısını da böler. Ayrıca, $a \geq 1$ olduğundan $b^2-7a < ab^2+b+7$ 'dir. Bu nedenle, $b^2-7a \leq 0$ olmalıdır. Eğer $b^2-7a = 0$ ise, bu durumda b, 7 'nin bir katı olmalıdır ve dolayısıyla

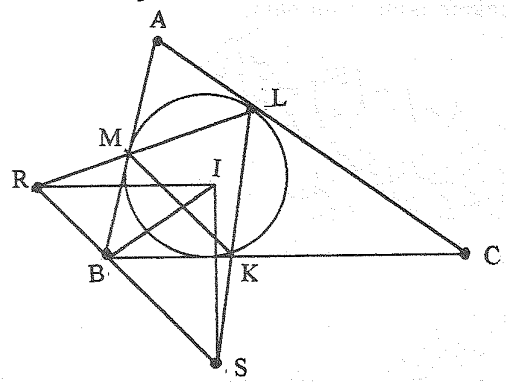
$$(a,b) = (7t^2, 7t)\ , \qquad t \geq 1$$

olur. $b^2 - 7a < 0$ durumunu ele alalım. Bu durumda, $7a - b^2$ pozitif tamsayısı $ab^2 + b + 7$ sayısının bir katı olur. $7a - b^2 < 7a$ olduğundan, bu durum ancak $b = 1$ veya $b = 2$ için mümkün olabilir (çünkü, aksi halde $ab^2 + b + 7 > 9a$ olur). $b = 1$ için $7a - 1$ sayısının $a + 8$ ile bölünmesi istenmektedir. $7a - 1 = 7(a+8) - 57$ ifadesinden $a + 8$ in 57 'yi bölmesi gerekir, $57 = 1.57 = 3.19$ olduğundan a 'nın alabileceği değerler $a = 11$ ve $a = 49$ 'dur. Buradan $(11,1)$ ve $(49,1)$ çözümleri elde edilir. $b = 2$ için ise $7a - 4$ sayısının $4a + 9$ ile bölünmesi istenmektedir. $4(7a-4) = 7(4a+9) - 79$ ifadesinden $4a+9$ 'un 79 'u bölmesi gerekir, ancak 79 'un $4a+9$ biçiminde bir böleni yoktur. O halde, $b = 2$ durumunda hiç çözüm yoktur ve problemdeki koşulu sağlayan ikililerin kümesi

$$\{(7t^2, t) : t \geq 1\} \cup \{(11,1), (49,1)\}$$

'den ibarettir.

Soru 5 'in Çözümü.



I, iç çemberin merkezi ve $RS//MK$ olduğundan, $BI \perp MK$ ve $BI \perp RS$ 'dir. Bu nedenle, $R\hat{I}S$ açısının dar açı olduğunu göstermek için

$$|BI|^2 > |BR||BS| \qquad (*)$$

olduğunu göstermek yeter. Çünkü, $R\hat{I}S$ açısının dar açı olmaması durumunda, I noktası, $[RS]$ 'yi çap kabul eden çemberin içinde veya üzerinde kalır ki bu durumda

$$|BI|^2 \leq |BR||BS|$$

olacağı açıktır. $(*)$ eşitsizliğini kanıtlamak için,

$$m(B\hat{M}R) = m(L\hat{M}A) = 90^0 - \frac{m(\hat{A})}{2}\ ,$$

$$m(M\hat{B}R) = 90^0 - \frac{m(\hat{B})}{2}\ ,$$

ve böylece

$$m(\widehat{MRB}) = 90^0 - \frac{m(\widehat{C})}{2}$$

olduğunu gözlemleyelim ve $\overset{\triangle}{MBR}$ üçgeninde Sinüs Teoremini uygulayıp

$$|BR| = \frac{\cos(A/2)}{\cos(C/2)}|BM|$$

elde edelim. Benzer şekilde, $\overset{\triangle}{KBS}$ üçgeninden

$$|BS| = \frac{\cos(C/2)}{\cos(A/2)}|BK| = \frac{\cos(C/2)}{\cos(A/2)}|BM|$$

elde ederiz. Böylece

$$|BR||BS| = |BM|^2$$

olur. $\overset{\triangle}{BKI}$ üçgeni dik üçgen olduğundan hipotenüs olan $|BI|$, dik kenar olan $|BM|$ 'den büyüktür. Sonuç olarak

$$|BI|^2 > |BM|^2 = |BR||BS| .$$

Soru 6 'nın Çözümü. Sözkonusu olan fonksiyonların kümesini K ile gösterelim. Bu fonksiyonlardan herhangi biri f ve $f(1) = c$ olsun. Verilen koşulda $t = 1$ ve $s = 1$ alınarak her $s \in$ N için

$$f(f(s)) = c^2 s$$

ve her $t \in$ N için

$$f(ct^2) = (f(t))^2$$

olduğu görülür. Bunlar ve verilen koşul kullanılarak,

$$[f(t)f(s)]^2 = [f(s)]^2 f(ct^2)$$

$$= f(s^2 f(f(ct^2))) = f(s^2c^2ct^2)$$

$$= f(c(cst)^2) = [f(cst)]^2$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, her $s,\ t \in$ N için $f(cst) = f(s)f(t)$ ve özel olarak, $f(cs) = cf(s)$ elde edilir. Sonuç olarak her $s,\ t \in$ N için

$$cf(st) = f(s)f(t) \qquad (1)$$

'dir. Şimdi, her $t \in$ N için $f(t)$ 'nin c 'ye tam bölündüğünü göstereceğiz. Verilen bir p asal sayısı için p 'nin c 'yi ve $f(t)$ 'yi bölen en büyük kuvvetleri, sırasıyla, p^α ve p^β olsun. Tümevarım ve (1) kullanılarak, her $k \in$ N için

$$[f(t)]^k = c^{k-1} f(t^k)$$

olduğu kolayca görülebilir. p 'nin $[f(t)]^k$ 'yı bölen en büyük kuvveti $p^{k\beta}$, c^{k-1} 'i bölen en büyük kuvveti ise $p^{(k-1)\alpha}$ 'dır. Dolayısıyla, her $k \in$ N için, $k\beta \geq (k-1)\alpha$ 'dır. Buradan, $\beta \geq \alpha$ olduğu görülür. Bu sonuç her p asal sayısı için doğru olduğundan c sayısı $f(t)$ 'yi tam böler. Bu nedenle, her $t \in$ N için

$$g(t) = f(t)/c$$

alınırsa N 'den N 'ye yeni bir fonksiyon elde edilir. f için yukarıda elde edilen eşitlikler g cinsinden ifade edilirse, her $s,\ t \in$ N için

$$g(c) = c, g(st) = g(s)g(t), g(g(s)) = s \quad (2)$$

eşitlikleri elde edilir. Gerçekten $g(c) = f(c)/c = cf(1)/c = c$ açık olup, $g(st) = g(s)g(t)$ eşitliği (1) 'e denktir ve $g(g(s)) = s$ eşitliği,

$$cg(g(s)) = g(c)\ g(g(s))$$

$$= g(cg(s)) = g(f(s))$$

$$= \frac{f(f(s))}{c} = \frac{c^2 s}{c} = cs$$

işlemleri ile görülebilir. (2) kullanılarak her $s, t \in \mathbb{N}$ için

$$g(t^2g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = s[g(t)]^2$$

olduğu, yani $g \in K$ olduğu görülür. Ayrıca, g 'nin aldığı değerler f 'nin karşılık gelen değerlerinden büyük olamaz. Dolayısıyla, K 'nin tüm f elemanları için $f(1998)$ 'in en küçük değerini bulmak yerine N 'den N 'ye (2) koşullarını sağlayan g fonksiyonları için $g(1998)$ 'in en küçük değerini bulmak yeterlidir. Bu aşamada en önemli adım, bu tür her g fonksiyonunun her asal sayıyı yine bir asal sayıya dönüştürdüğünü göstermek olacaktır. Gerçekten, p bir asal sayı olsun ve $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$g(p) = ab$$

olduğunu varsayalım. (2) 'den

$$p = g(g(p)) = g(ab) = g(a)g(b)$$

ve buradan ya $g(a) = 1$ ya da $g(b) = 1$ olması gerekir. $g(a) = 1$ ise, $g(g(a)) = a = 1$ ve sonuç olarak $g(p)$ asaldır.

İstenilen en küçük değeri bulmak için, N 'den N 'ye, (2) 'yi sağlayan bir g fonksiyonu alalım. $s, t \in \mathbb{N}$ için

$$g(s) = g(t) \Rightarrow s = g(g(s)) = g(g(t)) = t$$

olacağından g bire-birdir ve farklı asalları farklı asallara dönüştürür. Dolayısıyla, $g(1998) = g(2.3^3.37) = g(2)[g(3)]^3g(37)$ 'nin en küçük değeri, $(g(2), g(3), g(37)) = (3, 2, 5)$ olunca elde edilir. Demek ki, istenilen en küçük değer $3.2^3.5 = 120$ 'den küçük olamaz, N 'den N 'ye $g(1) = 1$, $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(37) = 5$, $g(5) = 37$; $\{2, 3, 5, 37\}$ kümesi dışındaki her asal için $g(p) = p$ ve asal çarpanlarına ayrılışı $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için $g(n) = g(p_1)^{\alpha_1}g(p_2)^{\alpha_2}\ldots g(p_r)^{\alpha_r}$ ile tanımlanan g fonksiyonu (2) 'yi sağlar ve $g(1998) = 120$ 'dir. O halde, istenilen en küçük değer 120 'dir.