FİZİKTE ZETA-FONKSİYONU (I)

M. Gündüz İkeda
TÜBİTAK Feza Gürsey Enstitüsü, PK 6, Çengelköy, 81220-İSTANBUL

Cahit Bey ve Feza Bey'in anısına...

---

5 yıl önce Türk Fiziğinin temsilcisi Prof. Dr. Feza Gürsey 'i kaybettikten sonra, geçen Aralık ayında da Türk Matematiğinin en büyük öncüsü Ord. Prof. Dr. Cahit Arf 'ı kaybettik. Bu vesile ile sizlere, Cahit Bey ve Feza Bey ile ilgili bazı anılarımı, onların ilgi alanı olan iki branşın gelişme akışını da kısmen katarak, sunmak istiyorum.

1. Fizikte Zeta-Fonksiyonu ...

1970 'lerde bir gün ODTÜ Fizik bölümünde çay odasında idim. Ne için oraya gittiğimi hiç hatırlamıyorum, fakat orada tesadüfen Feza Bey ile karşılaştım, herhalde Yale 'den izinli olarak ODTÜ 'de kalıyordu. O zaman Feza Bey bana "Biz fizikte zeta-fonksiyonu kullanmak istiyoruz" dedi. Acaba hangi tipten zeta-fonksiyonunu nasıl kullanmayı düşündüğünü tam soracakken, araya başka bir iş mi girdi hatırlamıyorum, bu konuşma daha ilerlemeden orada kaldı. Ancak Feza Bey 'in sözünün arkasında Cahit Bey 'in fikrinin de olabileceğini hissettim. Zira o günlerde Cahit Bey ile aramızda geçen konuşmalarda buna benzer konular da geçmişti: Sadece rasyonel sayıların fiziksel ölçümde kullanıldığı, dolayısıyla Q rasyonel sayı-cisminin aritmetiğinin şu veya bu şekilde fiziksel teoriler için de yansıması gerektiği, Q 'daki aritmetiği en iyi saklayanın da zeta-fonksiyonu olduğu v.s.

Bugünkü matematikte zeta-fonksiyonları pek çoktur. Riemann zeta-fonksiyonundan başlayıp, sırasıyla Dirichlet-, Dedekind-, Hecke-, Artin- v.s. gibi bir sürü zeta-fonksiyonları, ve karakterleri de içeren L-fonksiyonları var, hatta verilen cebrik bir varieteye ait zeta-fonksiyonları, örneğin Hasse-Weil-, veya "motivik" zeta-fonksiyonları, çok sofistike olanlar da var. Ancak, aralarındaki ortak bir nokta, bunların hepsinin, ya zamanın en seçkin matematikçilerinin adlarını taşımaları, veya onların yaptıklarıyla doğrudan doğruya ilgili olmalarıdır. Sadece bu gerçek bile, zeta-fonksiyonlarının matematik içindeki önemini yeter derecede göstermektedir. Fakat matematikçiler için, bilhassa genç iddialı olanlar için, bu tip fonksiyonlarla ilgilenmelerinde daha somut bir sebep, zeta-fonksiyonları ile ilgili hala çözülmemiş çok önemli ve zor bir çok problemin bulunmasıdır, ve bu problemler genç yetenekli matematikçilerin bunları çözmek için kurduğu hayallerini ve giriştiği gayretlerini kamçılamaya devam etmektedir.

Bu problemlerden bir örnek olarak, Riemann zeta-fonksiyonunun sıfır noktaları ile ilgili problemi ele alalım. $\zeta(z)$ Riemann zeta-fonksiyonu, herkesin analiz dersinde gördüğü gibi, z kompleks değişkeninin $Re(z)$ reel kısmının 1 'den büyük olduğu halde, $\sum_n n^{-z}$ yakınsak serisi ile tanımlanmaktadır. Ancak $\zeta(z)$ fonksiyonunun tanımını bütün kompleks düzlem üzerine genişletmek mümkündür, yani $\zeta(z)$ bütün kompleks düzlem üzerinde tarif edilmiş bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, $z = 1$ noktasında 1. dereceden bir kutup noktasına sahip olup, bu noktadaki rezidüsü 1 'dir, ama diğer bütün noktalarda regülerdir. Ayrıca

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin(z\pi/2)\Gamma(1-z)\zeta(1-z)$$

şeklindeki bir fonksiyonel denklemi de sağlamaktadır, burada $\Gamma(z)$, gama fonksiyonudur. Bu fonksiyonun sıfır noktalarına gelince, $z = -2n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ noktaları onun sıfır noktalarıdır ($\zeta(z)$ 'nin bariz sıfır noktaları), fazla olarak, bariz olmayan bütün sıfır noktalarının $0 < Re(z) < 1$ şeridi içinde olduğu bilinmektedir.

1859 'da yayınlanmış olan "Über die Anzahl der Primzahlen under einer gegebenen Grösse" (Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) adlı makalesinde, Riemann 'ın ortaya attığı bazı açık sorulardan çoğu sonradan çeşitli matematikçiler tarafından çözülmüş olmasına rağmen, en sonuncusu olan şu soru hala "Riemann hipotezi" adı altında (ne pozitif ne de negatif olarak) çözülmeden ortada kalmaktadır: $\zeta(z)$ fonksiyonunun $0 < Re(z) < 1$ şeridi içinde bulunan bütün sıfır noktaları $Re(z) = 1/2$ doğrusu üzerinde midir? Bu arada, bu doğru üzerinde gerçekten sonsuz adette $\zeta(z)$ 'nin sıfır noktalarının bulunduğu tespit edilmiştir (örneğin, Titchmarsh: Riemann Zeta-function kitabına bakınız), ayrıca bu şerit içindeki bütün sıfır noktalarını kapsayan daha dar bölgelerin bulunmasına da çalışılmaktadır. Fakat bugüne kadar matematikçilerin bütün gayretlerine rağmen, bu soru hala çözülmeden kalmaya devam etmektedir. E. Artin tarafından kendisinin doktora tezi (1924) içinde, kongruens zeta-fonksiyonları için Riemann hipotezinin bir analojisi ortaya atıldığı vakit, zamanın matematik camiası tarafından büyük ilgi ile karşılanmasının nedeni de, yukarda belirtilen durumdan kaynaklanmaktadır. 1945 yılında bu sorun en nihayet A. Weil tarafından çözüldüğünde zamanın Matematik camiasında "Artık esas Riemann hipotezinin de çözülme zamanı yaklaştı" görüşü yaygın olmuştu. Ancak bunun yanıltıcı olduğunu, o zamandan bugüne neticesiz geçen 50 yıl göstermiştir.

Cahit Bey 'in Göttingen'de büyük başarıyla doktorasını tamamlayıp, 1938 'de yurdumuza dönüşünden sonraki 15 yıl içinde, kendisinin bir müddet, yukarıda adı geçen (ve zamanın en aktüel konusu olan) "kongruens zeta-fonksiyonları için Riemann hipotezi" ile ilgilenmiş olduğu muhtemeldir. Nitekim henüz yayınlanmamış olan bir makalesinde, F_q gibi sonlu bir cisim üzerinde (kompleks değişkenli) bir fonksiyon kurulmakta, ve bu fonksiyonun sıfır noktalarının hepsinin $Re(z) = 1/2$ doğrusu üzerinde olduğu gösterilmektedir. Kendisinin, bu şekilde kurulan fonksiyon ile $F_q(x)$ rasyonel fonksiyon-cisminin kongruens zeta-fonksiyonu arasındaki bağlantıyı inceledikten sonra, daha genel duruma geçip, yani $F_q(x)$ cisminin sonlu mertebeden cisim genişlemelerinin haline geçip, "kongruens zeta-fonksiyonları için Riemann hipotezi" 'ni ispatlamayı amaçlamış olabileceğini tahmin ediyorum. Pek kimsenin bilmediği bu çalışmanın yeniden incelenmesi çok yerinde olur kanısındayım.

2. Adeller ve İdeller

Herhalde Riemann-Roch Teoreminin adını duymuşsunuzdur. **C** kompleks sayı cismi üzerindeki Cebrik Fonksiyonlar Teorisinde (yani Kompleks Değişkenli Cebrik Fonksiyonlar Teorisinde) en önemli sonuçlardan biri olarak kabul edilen bu teorem kabaca şöyle özetlenebilir: $\mathcal{R}$ gibi kapalı (=kompakt) bir Riemann yüzeyi verilmiş kabul edelim. $\mathcal{R}$ üzerindeki analitik fonksiyonların hepsi, **C** üzerinde bir cebrik fonksiyon-cismi oluşturur. Şimdi $\{p_i | i = 1, \cdots, r\}$ ve $\{q_j | j = 1, \cdots, s\}$ gibi birbirine yabancı olan ($\mathcal{R}$ üzerindeki) iki nokta kümesi verildiğini, ayrıca $\{n_i | i = 1, \cdots, r\}$ ve $\{m_j | j = 1, \cdots, s\}$ gibi negatif olmayan tamsayılardan oluşan iki küme de verilmiş olduğunu varsayalım. Bu takdirde D ile $\{\{p_i\}, \{q_j\}; \{n_i\}, \{m_j\}\}$ ailesini gösterelim (böyle bir aileye "divizör" adı verilmektedir), ve $n(D) = \sum_i n_i - \sum_j m_j$ sayısına da D divizörünün derecesi diyelim. Ayrıca $\mathcal{R}$ üzerindeki analitik fonksiyonlardan

(i) her $i(= 1, \cdots, r)$ için, P_i noktasında en fazla n_i-inci dereceden bir kutup noktasına sahip olup,

(ii) her $j(= 1, \cdots, s)$ için q_j noktasında en az m_j-inci dereceden bir sıfır noktasına sahip olan

bütün fonksiyonları göz önüne alalım. O zaman bu fonksiyonlar **C** üzerinde $\mathcal{L}(D)$ ile gösterilen bir vektör uzayı oluşturur, ve $\mathcal{L}(D)$ uzayının **C** üzerindeki boyutu *sonludur*. Bu boyutu $l(D)$ işareti ile gösterelim. Bu takdirde (**C** üzerindeki) Riemann-Roch teoremi, herhangi D divizörü için geçerli olan, $n(D)$ ile $l(D)$ arasındaki bağlantıyı vermektedir. Bu bağlantı içinde, yalnız $\mathcal{R}$ Riemann yüzeyine bağlı olan, $\mathcal{R}$ 'nin cinsi adı verilen $g(\mathcal{R})$ gibi bir (negatif olmayan) tamsayı da yer almaktadır. Kabaca $\mathcal{R}$

Riemann yüzeyinin delik sayısı olarak da bilinen $g(\mathcal{R})$ sayısı, $\mathcal{R}$ yüzeyinin topolojik yapısını belirtmektedir.

1936 yılında F. K. Schmidt, herhangi katsayı-cismi üzerindeki cebrik fonksiyon-cisimleri için de Riemann-Roch teoreminin geçerli olduğunu, daha önce Dedekind-Weber tarafından geliştirilmiş yöntemleri daha da genişleterek ispatlamıştır. Ancak 1938 yılında A. Weil, "Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen" (J. für die reine u. angew. Math. 179) adlı çalışmasında, adel (="adèle") kavramını kullanarak, aynı sonucu bambaşka bir yolla ispatlamayı başarmıştır. Sayılar Teorisi ve bununla ilgili sahalarda, hatta bu günlerde Teorik Fizikte bile, çok önemli bir yer işgal eden bu kavram üzerinde, kısa da olsa, durulması okuyucumuz için yararlı olur kanısındayım.

F gibi bir cisim üzerinde tanımlanmış, reel değerli φ gibi bir fonksiyon, her $a, b \in F$ için

(1) $\varphi(a) \geq 0$, ve $\varphi(a) = 0 \iff a = 0$

(2) $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$

(3) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

şartlarını sağlıyorsa, φ fonksiyonuna F 'nin bir valuasiyonu adı verilmektedir. Ancak bariz bir hali gözönüne almamak için, "$\exists a \in F$, öyle ki $\varphi(a) \neq 0$ ve 1" koşulunu da kabul ediyoruz. Not olarak belirtelim:

(i) F 'nin φ gibi bir valuasiyonu verildiğinde, her $a, b \in F$ için $d_\varphi(a,b) = \varphi(a-b)$ koyarsak, F üzerinde bir metrik elde ederiz;

(ii) φ, φ', F 'nin iki valuasiyonu olmak üzere, d_φ ve $d_{\varphi'}$ metrikleri F üzerinde aynı topoloji meydana getiriyorlarsa, " φ ve φ' eşdeğerdir" diyoruz.

Ostrowski 'nin temel teoremlerinden, özel olarak $F = Q$ (rasyonel sayı cismi) halinde, Q 'nun herhangi bir valuasiyonu için, onun ya ($|.|_\infty$ ile gösterilen) mutlak değer fonksiyonuna, ya da ($|.|_p$ işaretiyle gösterilen) p-adik valuasiyonuna eşdeğer olduğunu görürüz. Not olarak hatırlayalım: p bir asal sayı olmak üzere, $a = A/B$ (A, B tamsayılar, ve $B \neq 0$) şeklindeki sıfırdan farklı bir rasyonel sayının, p-adik valuasiyona göre değeri, $|a|_p = (1/p)^{\nu(A)-\nu(B)}$ olarak tanımlanmaktadır, burada $\nu(A)$ sayısı, $p^{\nu(A)}|A$, fakat $p^{\nu(A)+1} \not| A$ olacak şekilde seçilir, ve $\nu(B)$ sayısı da aynı koşul altında seçilecektir. $a = 0$ için ise, $|0|_p = 0$ konulacaktır. Bu şekilde tanımlanan p-adik valuasiyonun en belirgin özelliği, kendisinin, yukarıda (2) ile gösterilen eşitsizlikten daha çok kuvvetli olan şu eşitsizliği sağlamasıdır: Her $a, b \in Q$ için $|a+b|_p \leq max\{|a|_p, |b|_p\}$. $|.|_\infty$ mutlak değer fonksiyonu (valuasiyonu) için bu kuvvetli eşitsizliğin geçerli olmadığı hemen görülür, dolayısıyla $|.|_\infty$ valuasiyonu ile $|.|_p$ valuasiyonunun birbirlerinden çok farklı olduğu anlaşılmaktadır. Bu ayırımı şu şekilde ifade ediyoruz: $|.|_\infty$ Archimedean bir valuasiyon, fakat $|.|_p$ non-Archimedean bir valuasiyondur. Böylece Q cismi için iki ayrı tipten valuasiyonların var olduğunu gördük. Şimdi Q 'nun bir valuasiyonu verildiğinde, Q üzerinde bir metrik tanımlandığına göre, $|.|_\infty$ valuasiyonuna bağlı metriğe göre Q 'nun kapanışını düşünebiliriz. Reel sayıların rasyonel sayılardan Cantor Yöntemi ile nasıl kurulduğunu hatırlarsak, bu kapanışın $\mathbf{R}$ reel sayı cismi olduğunu anlarız.

Buna kısaca Q 'nun $|.|_\infty$ 'a göre kapanışı diyelim. Benzer şekilde $|.|_p$ 'ye göre kapanışını da düşünebiliriz. Ancak Q_p işaretiyle gösterilen, ve p-adik sayı cismi adı verilen bu kapanış, $\mathbf{R}$ 'den bambaşka karakterdedir. Örneğin, $\{1/p^n | n = 0, 1, \cdots\}$ dizisi $\mathbf{R}$ içinde 0 'a yakınsar, fakat Q_p içinde ise yakınsak değildir; $\{p^n | n = 0, 1, \cdots\}$ dizisi ise, $\mathbf{R}$ içinde yakınsamaz, fakat Q_p içinde ise 0 'a yakınsar.

Yukarıda Q cisminin çeşitli değişik kapanışlarının var olduğunu görmüş olduk. Dolayısıyla Q cisminin özellikleri, bilhassa aritmetik özellikleri, arasında Q 'nun $\mathbf{R}$ içindeki altküme olarak bakıldığında belirgin olanlardan başka, kendisinin Q_p içindeki altküme olarak görüldüğünde daha açık şekilde belli olanlar da vardır. Şu halde Q 'nun özelliklerini incelemek için, $\mathbf{R}$ ve Q_p cisimlerinin hepsini yanyana koyarak, yani $\mathbf{R} \times \Pi_p Q_p$ kartezyen çarpımını gözönüne alarak, bunun içine gömülmüş Q cisminin durumunu araştırmamız, ayrı ayrı incelemekten daha yararlı olabilir. Bu basit fikir, "adel" ve "idel" kavramlarının arkasında yatan düşüncedir.

Bundan sonraki ifadeleri basitleştirmek için, p işaretiyle ya ∞ veya herhangi bir asal sayıyı göstereceğiz. O zaman $\Pi_p Q_p$ ile yukarıdaki $\mathbf{R} \times \Pi_p Q_p$ kartezyen çarpımını daha basit bir şekilde gösterebiliriz. Şimdi $\Pi_p Q_p$ içindeki her eleman, p-inci koordinatı Q_p içinde bulunan bir vektör olarak düşünebiliriz. Şu halde bunu $\Pi_p a_p$ $(a_p \in Q_p)$ şeklinde ifade edelim, bazen de daha kısa olsun diye, $\Pi_p a_p$ yerine $\hat{a}$ gösterimi kullanılacaktır. Bu elemanlar arasında toplama ve çarpma işlemlerini

$$\Pi_p a_p + \Pi_p b_p = \Pi_p(a_p + b_p) \text{ ve } (\Pi_p a_p)(\Pi_p b_p) = \Pi_p(a_p b_p)$$

eşitlikleri ile tanımlarsak, $\Pi_p a_p$ kartezyen çarpımının bir halka oluşturduğunu görürüz. Ayrıca her p (∞ veya bir asal sayı) için, ve her $\hat{a} = \Pi_p a_p$ elemanı için, $|\hat{a}|_p = |a_p|_p$ koyarak,

(i) $|\hat{a} + \hat{b}|_p \leq max\{|\hat{a}|_p, |\hat{b}|_p\}$ (sadece p 'nin bir asal sayı olduğu halde),

(ii) $|\hat{a}\hat{b}|_p = |\hat{a}|_p |\hat{b}|_p$

bağıntılarının geçerli olduğunu da anlarız.

Ancak $\Pi_p Q_p$ halkası gayemiz için fazla büyüktür. Daha uygun bir althalkasına geçmek amacıyla, sadece şu koşulu sağlayan elemanları gözönüne alacağız: Sonlu sayıda p dışında daima $|\hat{a}|_p \leq 1$ 'dir. İşte bu koşulu sağlayan ($\Pi_p Q_p$ içindeki) her elemana **adel** adı verilmektedir. Yukarıdaki (i) ve (ii) bağıntılarından, bütün adellerin bir halka oluşturduğunu hemen görürüz, ve buna Q cismine ait adeller halkası adını verip, A_Q işaretiyle göstereceğiz. A_Q adeller halkası içindeki (çarpım işlemine göre) tersinir her adele de **idel** adını vereceğiz. İdellerin hepsinin bir grup oluşturduğu açıktır. Q 'ya ait idellerin grubunu da I_Q ile göstereceğiz.

Şimdi Q cismini A_Q içine nasıl yerleştirebiliriz? Buna geçmeden önce şuna dikkat edelim: Sıfırdan farklı her $a \in Q$ için, sonlu sayıda p dışında daima $|a|_p \leq 1$ 'dir, diğer taraftan her p için $|0_p| = 0$ 'dır. Şu halde, herhangi $a \in Q$ için $\tilde{a} = (\cdots, a, a, \cdots)$ (her koordinatı a) elemanı bir adeldir, yani $\tilde{a} \in A_Q$ 'dur. Üstelik, her $a, b \in Q$ çifti için, $\widetilde{(a+b)} = \tilde{a} + \tilde{b}$, ve $\widetilde{ab} = \tilde{a}\tilde{b}$ olur. Dolayısıyla $a \in Q$ ile $\tilde{a} \in A_Q$ adelini aynı şey olarak görerek (identification), Q cismi A_Q içine yerleştirildi diyebiliriz. Fazla olarak sıfırdan farklı her $a \in Q$ için şu bağıntının geçerli olduğuna da işaret edelim:

$$\Pi_p |a|_p = 1 \qquad (*)$$

burada p , ∞ ve bütün asal sayılar üzerinde değişecektir.

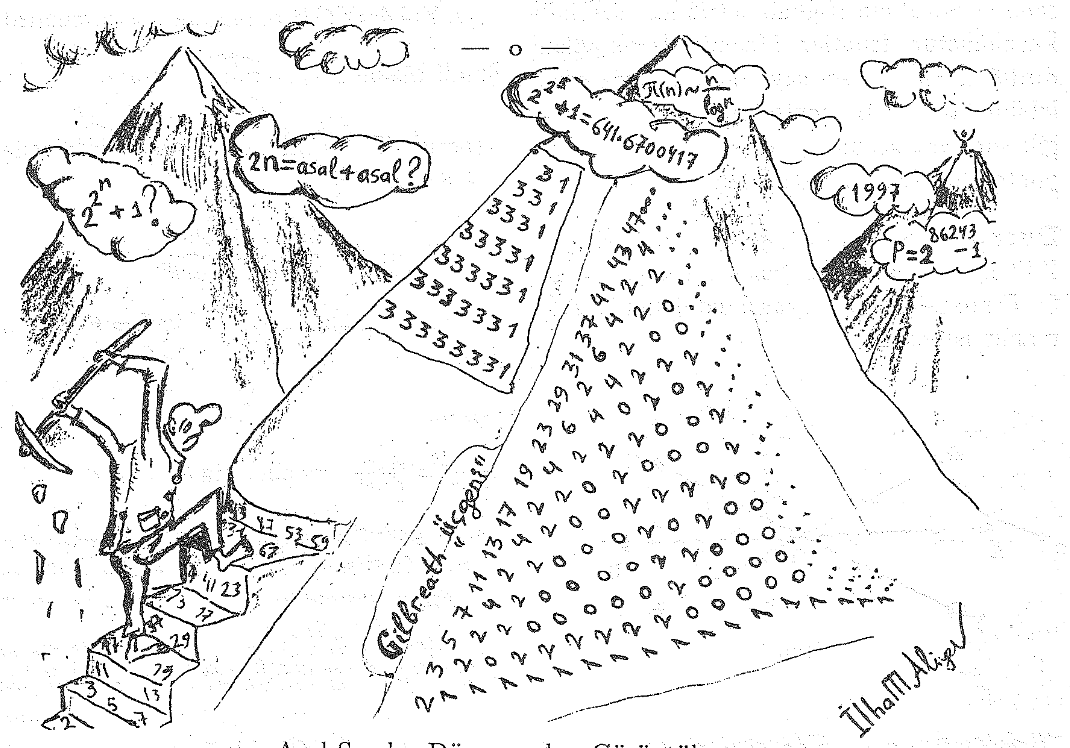
Şimdiye kadar, basit olsun diye, sadece Q cismi için yaptıklarımızı, herhangi cebrik sayı cismi veya cebrik fonksiyon cismi için genişletmek olanaklıdır. Genel olarak F gibi bir cisime ait adeller halkasını A_F ile, ideller grubunu da I_F ile göstereceğiz.

A. Weil 'in yukarıda belirtilen makalesinde yaptıklarını özetleyecek olursak, kabaca şöyledir. K ile, k gibi herhangi bir katsayı cismi üzerindeki bir cebrik fonksiyon cismini göstermek üzere, ilk olarak, K 'nın divizörleri yardımıyla A_K üzerine bir k-lineer topoloji konulmuş, ve A_K^* dual uzayı ($= A_K$ üzerindeki k-değerli, sürekli, k-lineer fonksiyonellerin k-vektör uzayı) içinde $K^\perp$ altuzayına ait olan her fonksiyonele "K 'nın diferansiyeli" adı verildikten sonra, $K^\perp$ altuzayının gerçekte K-vektör uzayı olduğu, üstelik bu uzayın K-boyutunun 1 olduğu gösterilmiştir: $dim_K K^\perp = 1$. Bu durum, Cahit Bey'in deyişine göre, (uygun "identification" altında) K 'nın, A_K içinde "self-dual" olduğunu göstermektedir. (Not: Daha doğrusu, "self-annihilating" veya "self-killing" dememiz gerekir.) Bundan sonra, K 'nın divizörleri için derece ve boyut fonksiyonlarını içeren hesaplar yapılarak, ayrıca yukarıda belirtilen "diferansiyel" kavramı ile daha somut bir kavram olan Hasse-diferansiyeli arasındaki bağlantı da açıklanarak, F. K. Schmidt 'in formüle ettiği Riemann-Roch Teoremi elde edilmektedir. (Not: A. Weil 'in fikrine dayanan Riemann-Roch teoreminin bir ispatı, "K. Iwasawa: Algebraic Functions, AMS Translation Series (1990)" kitabında bulunmaktadır. Bu kitap, sadece cebrik fonksiyonların cebrik teorisini kapsamakla kalmayıp analitik teorisini de, yani kapalı Riemann yüzeyler teorisini de, çok net bir şekilde içermektedir. Kanımca bu sahada az bulunan çok iyi bir kitaptır.)

1953 yılında Mainz Bilimler Akademisinde yayınlanmış olan "Über die Analogon des Riemann-Rochschen Sates in Zahlkörper" adlı makalesinde, Cahit Bey, o zamana kadar genelde cebrik fonksiyon cisimlerinde formüle edilip, ispatlanmış olan Riemann-Roch teoreminin sayı cisimlerindeki analojisini formüle etmiş, ve ispatlamıştır. Bu makaledeki ana fikir, yukarıda belirtilen "Riemann-Roch Teoremi $=$ K 'nın A_K içinde self-dual oluşu" ilkesine dayanmaktadır.

Bu vesile ile J. T. Tate 'in 1950 yılında hazırladığı doktora tezinden de bahsetmek yerinde olacaktır. Tate, "Fourier Analysis in Number Theory and Hecke's Zeta-functions" adını taşıyan, ve çok yankı uyandıran bu tezde, K gibi bir cebrik sayı-cismine ait A_K adeller halkası ve I_K ideller grubu üzerinde harmonik analiz yaparak, daha önce Hecke tarafından oldukça yapay bir şekilde ortaya atılan Hecke L-fonksiyonlarını, lokal L-fonksiyonlarının yardımıyla sistematik bir şekilde elde etmeyi başarmıştır (Not: Tate'in tezi, "J. W. Cassels ve A. Fröhlich: Algebraic Number Theory" kitabının son kısmında bulunmaktadır). Bu makale içinde de sayı cisimleri için Riemann-Roch Teoremi formüle edilip, ispatlanmaktadır. Ancak bu makaledeki teorem, formülasyonu ve ispatının yöntemi bakımından, Cahit Bey 'in teoreminden oldukça farklı gözükmekte olup, aralarındaki bağlantı hiç apaçık değildir. Bu iki teorem arasındaki münasebetin incelenmesi kanımca çok ilginç bir konudur.

— o —



Asal Sayılar Dünyasından Görüntüler