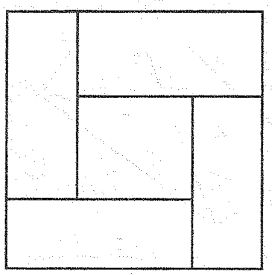
PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.161. m ve n doğal sayılar olmak üzere $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ 'dir. $\frac{m}{n} < \sqrt{2}\,(1 - \frac{1}{4n^2})$ olduğunu gösteriniz.

A.162. Bir kare, şekilde görüldüğü gibi, beş dikdörtgene bölünmüştür. Karenin kenarları ile ortak kenarları olan dört dikdörtgenin alanları birbirine eşitse, tam ortadaki dikdörtgenin bir kare olduğunu gösteriniz.



A.163. 6 tane ikinci derece denklem veriliyor:

$$x^2 + p_k x + q_k = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, 6.$$

p_k 'ların hepsinin farklı sayılar olduğu, her denklemin iki farklı kökü bulunduğu ve farklı köklerin toplam sayısının 4 olduğu biliniyorsa, bu 4 kökün toplamı neye eşittir?

A.164. Dar açılı bir üçgenin her kenarının orta noktasından diğer iki kenara dikler çizilmiştir. Bu diklerin sınırladığı altıgenin alanının, üçgenin alanının yarısına eşit olduğunu gösteriniz.

A.165. Yazı tahtasına $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{12}$ sayıları yazılmıştır.

a) Bu yazılışta virgüller yerine + veya - işaretleri konarak sıfır elde etmek mümkün müdür?

b) Eğer mümkün değilse, sayıların (ve virgüllerin) en az kaç tanesi silindikten sonra geriye kalan virgüller yerine + veya - işaretleri konarak sıfır elde etmek mümkündür?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.161. $q > 5$ olmak üzere p ve q asal sayıları $q|(2^p + 3^q)$ koşulunu sağlarsa $q > p$ olacağını gösteriniz (*Kazım Büyükboduk-İzmir*).

Y.162. Bir üçgenin kenar uzunlukları a, b, c; çevrel çemberinin yarıçapı R ise,

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{a+c-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq \sqrt[3]{3}R$$

olduğunu gösteriniz. (*Mehmet Bumin Yenmez-İzmir*)

Y.163. Merkezi $(0, 1)$ noktasında olan bir çember $y = x^2$ parabolünü 4 ayrı noktada kesiyor: A,B,C,D.

a) $Alan(ABCD) < \sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz.

b) $ABCD$ 'nin alanının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Y.164. $p, q \in \mathbf{N}$, $q < 100$ olmak üzere, sayı ekseni üzerinde $\frac{p}{q}$ noktaları işaretlenmiştir. Uzunluğu 3.10^{-3} olan bir α parçası, koordinat başlangıcından 1 noktasına doğru kaydırılıyor. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{5}]$ parçasının ikişer ikişer birbirinden ayrık öyle dört tane altaralığı vardır ki, α parçası bu aralıklardan herhangi biri içinde bulunduğunda, daha önce işaretlenmiş olan $\frac{p}{q}$ noktalarından hiç birine değmeyecektir; kanıtlayınız.

Y.165. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ sınırsız, kesin artan pozitif sayı dizisi olsun.

a) Her $k \geq k_0$ için

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_0 \in \mathbf{N}$ sayısının varlığını gösteriniz.

b) Her $k \geq k_1$ için

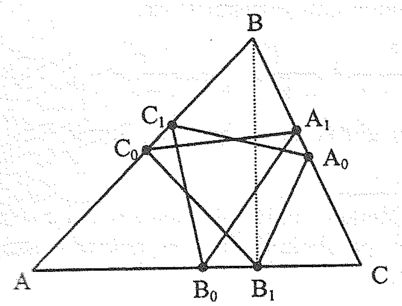
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1998$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_1 \in \mathbf{N}$ sayısının varlığını gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A.151. Bir ABC üçgeninin kenarortayları AA_0, BB_0, CC_0 ve yükseklikleri de AA_1, BB_1, CC_1 'dir. Bu durumda, $A_0B_1C_0A_1B_0C_1A_0$ -kapalı çokgeninin (poligonunun) çevre uzunluğunun ABC üçgeninin çevresinin uzunluğuna eşit olduğunu ispat ediniz.

Çözüm



$|A_0C_1| = |A_0B|$ ve $|A_0B_1| = |A_0C|$ olduğunu göstermek yeter. Çünkü bu eşitliklerden

$$|A_0C_1| + |A_0B_1| = |A_0B| + |A_0C| = |BC|$$

olduğu çıkar. Benzer şekilde, $|AB| = |C_0A_1| + |C_0B_1|$ ve $|AC| = |B_0C_1| + |B_0A_1|$ eşitlikleri de gözönüne alınarak

$$|AB| + |BC| + |CA| = |C_0A_1| + |C_0B_1| + |A_0C_1| + |A_0B_1| + |B_0A_1| + |B_0C_1|$$

elde edilebilir.

Böylece, $|A_0C_1| = |A_0B|$ ve $|A_0B_1| = |A_0C|$ olduğunu gösterirsek işimiz biter.

BB_1C dik üçgenine bakalım. $|BA_0| = |A_0C|$ olduğundan $|B_1A_0| = |A_0C|$ olur. Benzer şekilde, CBC_1 dik üçgeninde $|C_1A_0| = |A_0B|$ 'dir.

A.152.

$$\frac{2499}{10000} < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en küçük n doğal sayısı nedir?

Çözüm. Eşitsizliğin sağ yanındaki toplam bir "teleskopik" toplamdır:

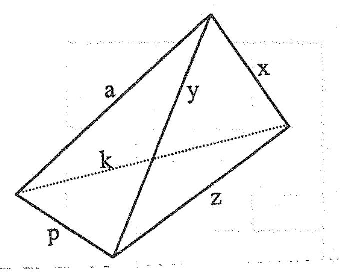
$$\begin{aligned} S_n &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{k(k+1)} - \tfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\frac{2499}{10000} < S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

olması için gerek ve yeter koşul, $4998 < n^2 + 3n$ yani, $n \geq 70$ olmasıdır. Böylece, verilen eşitsizliği sağlayan en küçük n doğal sayısı 70 'tir.

A.153. Bir dörtyüzlünün (tetrahedron) ayrıtlarından, her ayrıt bir kez kullanılarak, iki tane üçgen yapılabileceğini kanıtlayınız.

Çözüm. Dörtyüzlünün en uzun ayrıtına a diyelim.



Diğer ayrıtların uzunluklarını da, şekildeki gibi, x, y, z, k ve p ile gösterelim. $a < x + y$ ve $a < k + p$ eşitsizliklerinden en az biri sağlanmak zorundadır. Aksi halde, $a \geq x + y$ ve $a \geq k + p$ 'den

$$2a \geq x + y + k + p = (x + k) + (y + p)$$

olur. Ancak üçgen eşitsizliğine göre (şekle bakınız), $a < x + k$ ve $a < y + p$ 'dir ve dolayısıyla, $2a \geq (x + k) + (y + p)$ olamaz. Böylece, $a < x + y$ veya $a < k + p$ eşitsizliklerinden en az biri sağlanmalıdır. Birinci eşitsizlik sağlandığında, kenarları a, x, y olan üçgen oluşturmak mümkündür ve bu halde kenarları k, p, z olan ikinci üçgen oluşturulmuş durumdadır. Benzer şeyler ikinci durumda da söylenebilir.

A.154. m bir doğal sayı olmak üzere

$$\int \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+m)}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm. Basit kesirlere ayırma yöntemi uygulanırsa

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)}$$
$$= \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x+1} + \cdots + \frac{c_m}{x+m}$$

Bilinen yöntemlerle,

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!(m-n)!}, \qquad 0 \leq n \leq m$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\int \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+m)} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!(m-n)!} \int \frac{dx}{x+n}$$
$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \ln(x+n)}{n!(m-n)!} + c$$

elde edilir.

A.155. (Sorunun yazımında hata olmuştur, doğrusu:)

$$z = \sum_{k=1}^{999} \frac{(1+i)^{2k}}{2^k} = \frac{(1+i)^2}{2} + \frac{(1+i)^4}{2^2} + \frac{(1+i)^6}{2^3} + \cdots + \frac{(1+i)^{1998}}{2^{999}}$$

karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

Çözüm. $(1+i)^2 = 2i$ olduğundan her $k = 1, \cdots, 999$ için

$$(1+i)^{2k} = 2^k . i^k$$

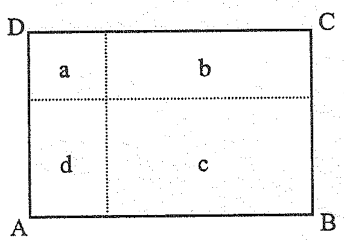
ve böylece

$$z = \sum_{k=1}^{999} i^k = i . \frac{1 - i^{999}}{1 - i} = -1 \; ;$$

z 'nin argümenti π 'dir.

Y.151. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin içinde rasgele bir P noktası alınıyor. P noktasından dikdörtgenin kenarlarına paralel doğrular çizilerek dikdörtgen 4 küçük dikdörtgene ayrılıyor. A ve C 'yi köşe kabul eden küçük dörtgenlerden en az birinin alanının $ABCD$ 'nin alanının $\frac{1}{4}$ ünden daha büyük olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. Küçük dikdörtgenlerin alanlarını a, b, c ve d ile gösterelim (şekilden izleyiniz). $a.c = b.d$ olduğu açıktır.



$ABCD$ 'nin alanına S dersek, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$S = a + b + c + d \geq 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bd} = 4\sqrt{ac}$$

ve böylece

$$ac \leq \frac{S^2}{16}$$

olur. Buradan ise a ve c sayılarından en az birinin $\frac{S}{4}$ 'ten daha büyük olamayacağı görülür.

(**Çözenler:** *Zayta Matematik Grubu (Ankara Fen Lisesi), M. Bumin Yenmez, Alper Çay, Seçil Çakallı, Samanyolu Matematik Grubu, Alp Şimşek, Süleyman Demirel*)

Y.152. Tüm terimleri $[0,1]$ aralığında bulunan öyle bir ıraksak $\{a_n\}$ reel sayı dizisi tanımlayınız ki, $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ olsun.

Çözüm. Örneğin $a_n = |\sin\sqrt{n}|$, $(n = 1, 2, \cdots)$ dizisi problemde verilen koşulları sağlar. Gerçekten,

$$||\sin\sqrt{n+1}| - |\sin\sqrt{n}||$$
$$\leq |\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}|$$
$$\leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$$

(**Çözenler:** *M. Bumin Yenmez*)

Y.153. $0 < a < 1$ olsun. Her x gerçel sayısı için

$$f(x) + f(ax) = x$$

denklemini sağlayan f sürekli fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm. $f(x) = x - f(ax)$ eşitliğinde x yerine ax koyarsak, $f(ax) = ax - f(a^2x)$ olur. Sonuncuda yine x yerine ax koyarsak, $f(a^2x) = a^2x - f(a^3x)$ olur ve bu şekilde devam edersek, her $k \in \mathbb{N}$ için $f(a^kx) = a^kx - f(a^{k+1}x)$ elde ederiz. Bunları gözönüne alırsak

$$\begin{aligned} f(x) &= x - f(ax) = x - [ax - f(a^2x)] \\ &= x - ax + f(a^2x) \\ &= x - ax + [a^2x - f(a^3x)] \\ &= x - ax + a^2x - f(a^3x) = \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^k x + (-1)^{n+1} f(a^{n+1}x) \\ &= \tfrac{1-(-a)^{n+1}}{1-(-a)} x + (-1)^{n+1} f(a^{n+1}x) \end{aligned}$$

olur. $0 < a < 1$, $f(0) = 0$ ve f fonksiyonunun sürekli olduğunu gözönüne alarak yukarıdaki eşitlikte $n \to \infty$ olmak üzere limite geçersek

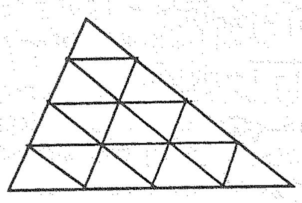
$$f(x) = \frac{1}{1+a}x + 0 = \frac{1}{1+a}x$$

elde ederiz.

(**Çözenler:** *M. Bumin Yenmez, Samanyolu Matematik Grubu, Hasan Karabıyık, Ramazan Çalış*)

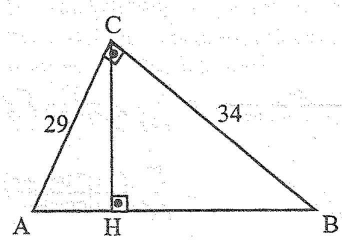
Y.154. Öyle bir üçgen bulunuz ki, tam 1997 tane eşit üçgene bölünebilsin.

Çözüm.



Dik kenarları 29 ve 34 olan dik üçgenin sözkonusu özelliğe sahip olduğunu görelim. İlk önce, her $n \in \mathbb{N}$ için her bir üçgeni, kendisine benzer n^2 tane eşit üçgene bölmenin olanaklı olduğunu görelim. Aşağıdaki şekilde, herhangi bir üçgenin $n = 4$ için $n^2 = 16$ eşit ve verilen "ana üçgene" benzer üçgenlere bölünmesinin bir yolu gösterilmiştir. (Burada kullanılan esas fikir $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ eşitliğidir.) Herhangi n doğal sayısı için de benzer yolla gidilebilir.

Şimdi, dik kenarları 29 ve 34 olan ACB dik üçgenini alalım.



Üçgenin CH yüksekliği bu üçgeni iki benzer üçgene ayırır. ACH üçgenini, herbirinin hipotenüsü 1 olan 29^2 tane eşit (ve dik) üçgene ayıralım. Benzer şekilde, CHB üçgenini, hipotenüsleri 1 olan 34^2 tane eşit (ve dik) üçgene ayıralım. Elde edilen $29^2 + 34^2 = 1997$ tane üçgenin hepsinin birbirine eşit olduğunu görmek zor değildir.

(**Çözenler:** *Murat Aygen*)

Y.155. x^2+y ve y^2+x her ikisi de tam kare olacak biçimde x ve y pozitif tamsayıları var mıdır?

Çözüm. Hayır. $x > y$ ise $x^2 + y$ bir tamkare olamaz. Çünkü, bu durumda

$$x^2 < x^2 + y < x^2 + x < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Benzer şekilde, eğer $x < y$ ise $y^2 + x$ sayısı bir tamkare olamaz.

(**Çözenler:** *M. Bumin Yenmez, Samanyolu Matematik Grubu*)