ÜÇÜNCÜ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI İKİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş - İlham Aliyev
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Üçüncü Antalya Matematik Olimpiyadının ikinci seçme sınavı 25 Nisan 1998 Cumartesi günü yapıldı. Sınava birinci seçme sınavında başarılı olan 75 öğrenci katıldı. Birincisinde olduğu gibi, ikinci sınav da Lise I-II ve Lise III olmak üzere iki kategoride yapıldı. Her iki kategoride de öğrencilere 5'er soru soruldu ve 3,5 saat süre verildi. Olimpiyadın ikinci seçme sınavında sorulan soruları, kısa çözümleri ile birlikte sunuyoruz.

Lise I-II Soruları:

1. Dört ardışık doğal sayının çarpımının asla bir tamkare (yani başka bir doğal sayının karesi) olamayacağını kanıtlayınız.

2. Yarıçapı 1 *cm* olan bir çember üzerinde rasgele 100 tane nokta işaretlenmiştir. Çember üzerinde, bütün işaretlenmiş noktalara olan uzaklıkları toplamı 100 *cm* 'den büyük olacak şekilde bir noktanın bulunduğunu gösteriniz.

3. x, y, z negatif olmayan reel sayılar, $x+y+z \le 3$ ise,

$$\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z} \ge 3$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_3^2 \\ x_2 + x_3 &= x_4^2 \\ x_3 + x_4 &= x_1^2 \\ x_4 + x_1 &= x_2^2 \end{cases}$$

5. Kenar uzunluğu 1 *cm* olan bir ABC eşkenar üçgeninin $[AB]$ kenarı üzerinde rasgele bir D noktası alınıyor. D 'nin AC ve BC üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla, E ve F; E ve F 'nin AB üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla, E_1 ve F_1 olsun.

$$|E_1F_1| = \frac{3}{4}\ cm$$

olduğunu gösteriniz.

Lise III Soruları:

1. Herhangi üç *tek* doğal sayı verildiğinde öyle bir dördüncü *tek* doğal sayı bulunabilir ki, bu dört sayının kareleri toplamı bir tamkaredir (yani başka bir doğal sayının karesi), kanıtlayınız.

2. Kenar uzunluğu 1 *cm* olan bir kare içine, alanları toplamı $1997,5\,cm^2$ olan ve konveks olmaları gerekmeyen 1998 tane çokgen, karenin dışına taşmayacak biçimde rasgele yerleştiriliyor. Karenin en az bir noktasının sözkonusu çokgenlerden hepsi tarafından örtüldüğünü gösteriniz.

3. x, y, z reel sayılar, $x \ge y \ge z > 0$ ise,

$$\frac{x^2-y^2}{z}+\frac{z^2-y^2}{x}+\frac{x^2-z^2}{y} \ge 3x-4y+z$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir koridorun, boyutları 2×11 m olan dikdörtgen biçimindeki tabanı, boyutları 1×2 m olan aynı tür halılarla, halılar birbirini örtmeksizin, kaplanmak isteniyor. Bu iş kaç farklı biçimde yapılabilir?

5. $ABCD$ konveks (dışbükey) dörtgeninin $[BC]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta noktaları, sırasıyla, P ve Q olsun. Eğer $|AP|+|AQ| = d$ ise, $ABCD$ dörtgeninin alanının $\frac{1}{2}d^2$ 'den küçük olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

Lise I-II Çözüm 1.

$$\begin{aligned} a &= k(k+1)(k+2)(k+3) \\ &= (k^2+3k)(k^2+3k+2) \\ &= (k^2+3k)^2+2.(k^2+3k)+1-1 \\ &= (k^2+3k+1)^2-1 \end{aligned}$$

ve $k^2+3k=n$ diyelim. Bu takdirde

$$n^2=(k^2+3k)^2<(k^2+3k)(k^2+3k+2)$$

$$=(k^2+3k+1)^2-1<(n+1)^2$$

çıkar. Böylece, $n^2<a<(n+1)^2$ olduğundan a bir tamkare olamaz.

Lise I-II Çözüm 2. Çemberin bir çapını çizelim ve onun uç noktalarına A ve B diyelim. Üçgen eşitsizliğine göre herhangi işaretlenmiş noktadan A ve B 'ye kadar mesafelerin toplamı 2 'den büyük olacaktır. O halde tüm işaretlenmiş noktalardan A ve B 'ye kadar mesafelerin toplamı $2.100=200$ 'den büyük olacaktır. Öyleyse, A ve B noktalarının en az birinden işaretlenmiş noktalara kadar mesafeler toplamı $200:2=100$ den büyük olacaktır.

Lise I-II Çözüm 3. $a=1+x, b=1+y$ ve $c=1+z$ diyelim: $a+b+c\le 3+3=6$. Buradan:

$$1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\le\frac{6}{a} \quad ;$$

$$\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}\le\frac{6}{b} \quad ;$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\le\frac{6}{c}$$

olur. Taraf tarafa toplarsak ve her pozitif m, n için

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\ge 2$$

olduğunu gözönüne alırsak,

$$6\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3+2+2+2=9$$

olur ve buradan da istenen sonuç çıkar.

Lise I-II Çözüm 4. Bu soruda, açıkça belirtilmemekle beraber, verilen denklem sisteminin reel çözümleri istenmektedir.

Her denklem bir öncekinden ve ilk denklem de sonuncudan çıkarılarak

$$\begin{cases} x_1-x_3 &= x_3^2-x_4^2=(x_3-x_4)(x_3+x_4) \\ &= (x_3-x_4)x_1^2 \\ x_2-x_4 &= x_4^2-x_1^2=(x_4-x_1)x_2^2 \\ x_3-x_1 &= x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)x_3^2 \\ x_4-x_2 &= x_2^2-x_3^2=(x_2-x_3)x_4^2 \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Verilen sayılardan en büyüğünün x_1 olduğunu kabul edebiliriz. Bu takdirde:

$$x_3-x_1=(x_1-x_2)x_3^2\Rightarrow x_1=x_3$$

olur. Eğer $x_1=0$ ise, 1.denklemden $x_2=0$ ve sonuncu denklemden $x_4=0$ olur ve $(0,0,0,0)$ bir çözümdür.

Eğer $x_1\ne 0$ ise,

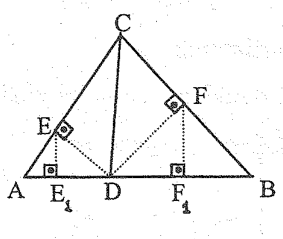
$0=x_1-x_3=(x_3-x_4)x_1^2\Rightarrow x_3=x_4$

$$\Rightarrow x_1=x_3=x_4\ne 0$$

$$\Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4\ne 0$$

bulunur. Verilen sistemde $x_1=x_2=x_3=x_4\ne 0$ koyarsak $(2,2,2,2)$ 'nin de bir çözüm olduğunu görürüz. Sistemin başka çözümü yoktur.

Lise I-II Çözüm 5.



$Alan(\overset{\triangle}{ABC})$

$=Alan(\overset{\triangle}{ADC})+Alan(\overset{\triangle}{BDC})$

$$= \frac{1}{2}[|ED|.|AC| + |FD|.|BC|]$$

$$= \frac{1}{2}[|ED| + |FD|] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

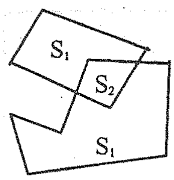
$$\Rightarrow |ED| + |FD| = \frac{\sqrt{3}}{2} \, ;$$

ve $|E_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2}.|ED|$, $|F_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2}.|FD|$

$$\Rightarrow |E_1D| + |F_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \, .$$

Lise III Çözüm 1. x, y, z tek doğal sayılar ise, $x^2 + y^2 + z^2 = 2p + 1 = (p+1)^2 - p^2$ sağlanacak biçimde p vardır. Buradan: $x^2 + y^2 + z^2 + p^2 = (p+1)^2$. p tek sayıdır, çünkü aksi halde eşitlik (mod 4) 'te çelişki verir.

Lise III Çözüm 2.



Çokgenlerin hepsine ait, pozitif alanlı bir bölge bulunduğunu gösterelim. S_k ile karenin öyle noktaları kümesinin alanını gösterelim ki, bu noktalar tam k tane çokgenle örtülmüş olsun. Varsayalım ki, $S_{1998} = 0$ olsun. O halde

$$1997,5 = S_1 + 2.S_2 + 3.S_3 + \cdots + 1997.S_{1997}$$

$$\leq 1997.(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{1997})$$

$$\leq 1997.1 = 1997$$

diye çelişki çıkar. [Bu soruya ikinci sınavda tam puan alarak Lise III 'ler arasında birinci olan M. Akif Erişmiş değişik ve güzel bir çözüm vermiştir; bu çözümü özetliyoruz: Çokgenlerden her birinin alanı 1 'den küçük veya 1 'e eşittir. Karenin, i. çokgen tarafından örtülen kısmının alanına s_i, örtülmeyen kısmının alanına da x_i diyelim. $x_i + s_i = 1$, $x_i \geq 0$. Eğer bu x_i alanlı bölgeler kareyi tamamen kapatmıyorsa, kapatılmayan bölgedeki her nokta tüm çokgenler tarafından örtülmüş olur. Verilenlerden

$$1997,5 = \sum_{i=1}^{1998} s_i = \sum_{i=1}^{1998} (1 - x_i) = 1998 - \sum_{i=1}^{1998} x_i$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^{1998} x_i = 0,5 < 1$$

olduğu görülür. Böylece, x_i alanlı bölgelerin (bu bölgeler kesişmeseler dahi) kapatmadığı noktalar, hatta pozitif alanlı bir kısım bulunduğu görülür. Bu noktalar tüm çokgenler tarafından örtülür.]

Lise III Çözüm 3.

$$x + y \geq 2z \, , \; z + y \leq 2x \, , \; x + z \geq y \Rightarrow$$

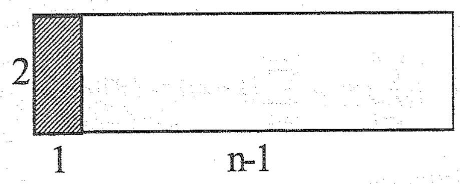
$$\frac{x+y}{z} \geq 2, \; \frac{z+y}{x} \leq 2, \; \frac{x+z}{y} \geq 1 \, .$$

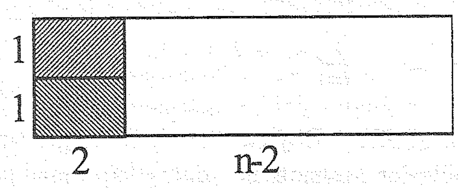
Bu eşitsizlikler, sırasıyla,

$$x - y \geq 0 \, , \; z - y \leq 0 \, , \; x - z \geq 0$$

ile çarpılarak toplanırsa problemde verilen eşitsizlik elde edilir.

Lise III Çözüm 4. Boyutları $2 \times n$ olan koridorun tam x_n biçimde kaplandığını varsayalım. $n = 1$ için $x_1 = 1$ ve $n = 2$ için $x_2 = 2$ olduğu açıktır. $n \geq 3$ olsun. $2 \times n$ boyutlu koridorun herhangi bir örtüsünü düşünelim. O halde koridorun sol kısmı için aşağıdaki şekillerden birisi geçerli olacaktır.





Birinci durumda $x_n = x_{n-1}$ ve ikinci durumda $x_n = x_{n-2}$ olur. Böylece,

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

indirgeme formülü elde edilir. Buradan

$$x_3 = 1 + 2 = 3, x_4 = x_3 + x_2 = 3 + 2 = 5,$$

$$x_5 = 8, \cdots, x_{11} = x_{10} + x_9 = 89 + 55 = 144$$

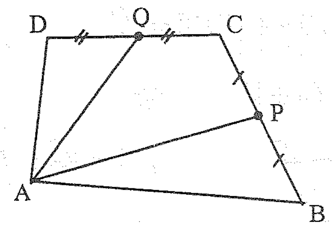
elde edilir.

Not:

$$x_n = \frac{1}{2^{n+1}.\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}]$$

'dir.

Lise III Çözüm 5.



$A(ABCD) = 2.A(APCQ)$ 'dur. $|AQ| = x$ dersek, $|AP| = d - x$ olur ve

$$A(ABCD) = 2.A(APCQ) < 2.2.A(\overset{\triangle}{APQ})$$

$$< 4.\frac{1}{2}x.(d-x) < 2.(\frac{d}{2})^2 = \frac{d^2}{2}$$

çıkar.

Bir sonraki sayfada verilen Yarışma Problemlerine çözümlerinizi gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, **Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA** adresine 31 Temmuz 1998 tarihine kadar gönderiniz.