# ARİTMETİK-GEOMETRİK ORTALAMALAR EŞİTSİZLİĞİNİN KULLANIMI ÜZERİNE

**İhsan Karabulut**

Gazi Üniversitesi, İstatistik Bölümü,
Teknikokullar, 06500-ANKARA

---

Okuyucular bu dergide daha önceki sayılarda da sıkça sözü edilen, kullanımı hayli yaygın olan ve genel olarak aritmetik-geometrik ortalama eşitsizlikleri denilebilecek eşitsizlikleri hatırlayacaklardır. Bu eşitsizlikler hakkında genel bilgi için [3] ve [5] çalışmaları gösterilebilir. Bu eşitsizlikler kuşkusuz çok değişik biçimlerde kullanılır; burada sözünü edeceğim kullanımı ise Arbel [1] 'e ait çalışmadan bir aktarım olacak. Özellikle kimi eşitsizliklerin gösterilmesinde çoğu kez rahatça kullanılabilecek bu yöntemi [1] 'de bulunan ve bu dergide de çeşitli nedenlerle kullanılmış olan iki eşitsizliğin gösteriminde kullanarak aktaracağım. Daha çok ve ilginç uygulama yine aynı kaynakta bulunabilir. Önce aritmetik-geometrik ortalamalara ait eşitsizlikler zincirinde yer alan ortalamalara ait tanımları hatırlayalım. $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, $n$ tane pozitif gerçel sayıdan oluşan bir dizi olmak üzere aritmetik ortalama $(A_n)$ $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$, geometrik ortalama $(G_n)$ $(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$, harmonik ortalama $(H_n)$ $n(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1})^{-1}$, kareli ortalama $(Q_n)$ da $(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlanır. Aritmetik-geometrik eşitsizlikler zinciri de

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

olarak yazılabilir. Ayrıca bu eşitsizlikler zinciri ortalamaların $n$. kuvvetlerinin alınması halinde de korunur ve $H_n^n \leq G_n^n \leq A_n^n \leq Q_n^n$ olarak yazılabilir. Bu eşitsizlikler zinciri $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ olması durumunda eşitlik $H_n = G_n = A_n = Q_n$ haline döner. Şimdi ortalamalara ait eşitsizliklerin kullanımını iki uygulama ile gösterelim.

İlk uygulama $n \geq 1$ olan tamsayılar için genel terimi $(1+\frac{1}{n})^n$ olan dizinin monoton artan ve üstten sınırlı olduğunu yukarıdaki eşitsizliklerin uygun olanlarını kullanarak göstermek olacak. Bu dizinin üstten sınırlı monoton bir dizi olduğu ve bildiğimiz rasyonel olmayan e sayısına yakınsadığı [2] ya da [6] 'da olduğu gibi değişik yöntemlerle de gösterilebilir. Hatta bu yöntemler dizi hakkında burada aktaracağımız bilgiden daha fazla bilgiyi de verebilir. Yapılacak ilk iş genel teriminin hangi ortalamaya benzetileceğini saptamak olacaktır. Kolayca görülebileceği gibi $(1+\frac{1}{n})^n$ bütün terimleri aynı $(1+\frac{1}{n})$ olan terimlerin çarpımıdır ve

$$(1+\frac{1}{n})^n = G_n^n$$

olarak yazılabilir. 1 sayısını $(n+1)$.terim olarak $(1+\frac{1}{n})$ sayılarına katarak $G_{n+1}^{n+1}$ bulunursa

$$G_n^n = G_{n+1}^{n+1}$$

olduğu görülür. Öte yandan $(n+1)$. terim olarak 1 sayısının $(1+\frac{1}{n})$ terimlerine katılması halinde

$$A_{n+1}^{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

olduğunun görülmesi ve

$$G_{n+1}^{n+1} < A_{n+1}^{n+1}$$

eşitsizliğinin kullanımı bize $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ dizisinin monoton artan olduğunu gösteren

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = x_{n+1}$$

sonucunu verecektir.

Benzer fikirler kullanılarak $y_n = (1-\frac{1}{n})^n$ dizisinin de monoton artan olduğunu görebiliriz:

$$y_n = (1-\frac{1}{n})^n < (1-\frac{1}{n+1})^{n+1} = y_{n+1}\,.$$

Şimdi, yukarıda tanımladığımız $(x_n)$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$z_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = x_n.(1+\frac{1}{n})\,,\ (n = 1,2,,\cdots)$$

dizisinin monoton azalan olduğunu göstermek yetecektir.

$$z_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{y_{n+1}}$$

eşitliği ve $(y_n)$ dizisinin artan olması $(z_n)$ 'nin azalanlığını kanıtlar. Özel halde

$$z_n < z_1 = (1+1)^{1+1} = 4 \Rightarrow z_n < 4\,, (n = 2, 3, \cdots)$$

ve buradan da

$$x_n.(1+\frac{1}{n}) = z_n < 4 \Rightarrow x_n < 4$$

olduğu çıkar.

İkinci uygulama olarak bir gösterimi [4] ve [2] 'de yer alan Bernoulli eşitsizliğini daha genel olarak [1] 'den alıntılayarak göstereceğiz. Önce Bernoulli eşitsizliğini hatırlatalım: $m, n \geq 0$ olan tamsayılar ve $x > -1$ olmak üzere $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$ için

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \leq 1 + \frac{m}{n}x$$

ve $\frac{m}{n} \geq 1$ olduğunda

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \geq 1 + \frac{m}{n}x$$

biçimindeki eşitsizlikler Bernoulli eşitsizlikleri olarak bilinir. Aşağıda yalnızca $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$ durumu ele alınacaktır, $\frac{m}{n} \geq 1$ için izlenecek yol aynı olacaktır. Ancak $\frac{m}{n} \geq 1$ durumunda $\frac{n}{m} \leq 1$ olduğu gözönünde tutulacak ve elde edilecek ilk sonuçtan faydalanılacaktır.

Şimdi ilk eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim. Her şeyden önce $(1+x) > 0$ olduğunun bilinmesi yukarıdaki eşitsizlikleri kullanmamıza olanak sağlayacaktır. $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ geometrik ortalamaya benzetilerek

$$((1+x)^m)^{\frac{1}{n}}$$

olarak yazılabilir. Bununla birlikte bu tam bir geometrik ortalama değildir. Geometrik ortalamanın tanımına benzetmek üzere yine 1 sayısının özelliği kullanılarak $(n-m)$ tane daha $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 1$ 'in çarpan olarak yer alması sağlanır. Bu yapılırsa

$$G_n^n = ((1+x)^{\frac{m}{n}} 1^{n-m})^{\frac{1}{n}}$$

elde edilir. Aritmetik ortalamaya da $n-m$ tane 1 eklendikten sonra doğrudan doğruya aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \leq \frac{m(1+x)+n-m}{n} = 1 + \frac{m}{n}x$$

elde edilir. Böylece Bernoulli eşitsizliği

$$0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$$

için kanıtlanmış oldu.

Aritmetik-geometrik eşitsizliklerin yalınlığı bu 'yöntemin' diğer eşitsizlikleri göstermekte kullanılabilirliğini arttıracaktır.

## KAYNAKÇA

[1 ] B. Arbel, From 'trics' to strategies for problem solving, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **21**, 429-438.

[2 ] Y. Avcı, K. Alnıaçık, N. Ergun, Kolay yoldan logaritma, *Matematik Dünyası*, **5-3** 10-12, (1995).

[3 ] H. Demir, Bazı ortalamalar, *Matematik Dünyası*, **1-1** 17-21, (1991).

[4 ] N. Ergun, Gerçel sayılarda dokuz temel eşdeğerlik, *Matematik Dünyası*, **4-5** 6-10, (1994).

[5 ] A. Erkip, Bazı temel eşitsizlikler, *Matematik Dünyası*, **1-4** 20-23, (1991).

[6 ] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3. baskı, McGraw-Hill, New York, 1976.

---

**Eğlenceli Matematik**

Farklı harfler farklı rakamları ve aynı harfler aynı rakamları belirtmek üzere, aşağıdaki eşitliği gerçekleyen rakamları bulunuz:

$$\frac{fut}{bol} = 0, golgolgol \cdots$$

(Baştaki 0 sıfırdır!)

---