KONVEKS FONKSİYONLAR, JENSEN EŞİTSİZLİĞİ VE BAZI UYGULAMALARI

İlham Aliyev
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

Bu yazımızda Fonksiyonlar Teorisinin ilginç konularından biri olan konveks fonksiyonların bazı özellikleri ile tanışacak ve bu fonksiyonların en ilginç özelliklerinden biri olan Jensen eşitsizliğinin ispatını göreceksiniz. Bildiğiniz bir çok ünlü eşitsizliklerden (Aritmetik-Geometrik Ortalamalar, Cauchy-Bunyakovski-Schwartz, Young vb) daha genel olan Jensen eşitsizliğinin kullanılmasıyla çözülebilen bir sıra problem örnekleri ile tanışmaktan memnun olacağınıza inanıyoruz.

Ayrıca, bu konuda bilgilerini daha da genişletmek isteyen sayın okurumuza [2], [3] kaynaklarına bakmasını tavsiye ediyoruz.

Tanım: Bir aralıkta sürekli olan f fonksiyonu bu aralıktan alınmış her x ve y için

$$f(\tfrac{x+y}{2}) \geq \tfrac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (1)$$

eşitsizliğini sağlarsa, sözkonusu fonksiyona bu aralıkta dışbükey (yukarıya doğru konveks) fonksiyon denir.

(1) 'deki eşitsizliğin tersini sağlayan sürekli fonksiyonlar ise içbükey (aşağıya doğru konveks) diye adlanır.

Türevlenen fonksiyonların konveks olup olmadığını belirlemek için şu test kullanılabilir:

f' türevi artan değilse, f fonksiyonu dışbükeydir;

f' türevi azalan değilse, f fonksiyonu içbükeydir.

Bu sonunculardan da konvekslik için ikinci türev testi çıkar: Verilen aralığın her noktasında $f''(x) \geq 0$ ise, f fonksiyonu içbükeydir.

Örneğin, $y = ln\, x$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında, $y = \sin x$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında, $y = -x^2$ fonksiyonu tüm reel eksende dışbükeydir. (Bu fonksiyonların grafiklerine göz atarsanız, "dışbükeylik" teriminin kullanılma nedenini anlarsınız.)

Konveksliğin tanımını verir vermez önemli bir uyarı verelim. Eğer f fonksiyonu bir $[a,b]$ aralığında sınırlıysa ve her $x,y \in [a,b]$ için (1) eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu (a,b)-açık aralığında otomatikman sürekli olur. Burada f fonksiyonunun sınırlılık koşulu çok önemlidir: Her noktada süreksiz, hiç bir aralıkta sınırlı olmayan, ancak buna karşın (1) eşitsizliğini her x,y için sağlayan fonksiyon örnekleri vardır [1]. Bu konuyu burada tüm ayrıntılarıyla vermek olanağımız olmadığından biz konveks fonksiyonun tanımında sürekliliği bir koşul olarak veriyoruz.

Şimdi, konveks fonksiyonlar için iyi bilinen Jensen eşitsizliğini bir teorem şeklinde verip ispatlayalım.

Teorem 1 (Jensen Eşitsizliği). f fonksiyonu dışbükey olsun ve $p_i \geq 0$, $(i = 1,2,\cdots,n)$ sayıları $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu takdirde konvekslik (dışbükeylik) aralığından alınmış her $x_1, x_2, \cdots, x_n$ için

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)$$
$$\geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \cdots + p_nf(x_n) \qquad (2)$$

olur.

Not 1. (-1) ile çarpma konveksliğin türünü değiştirdiğinden, içbükey fonksiyonlar için (2) eşitsizliği tersine döner.

Not 2. Negatif olmayan p_i 'ler için

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

koşulunu *eklemeden* (2) eşitsizliğini aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$f(\tfrac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n})$$
$$\geq \tfrac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n} \qquad (2')$$

($\frac{p_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n} + \cdots + \frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n} = 1$ olduğuna dikkat ediniz.)

Not 3. $n = 2$ halinde (2) eşitsizliği şu biçimde yazılabilir $(0 \leq \alpha \leq 1)$:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad (2'')$$

Teoremin aşağıda verdiğimiz ispatı, sürekli fonksiyonlar için (1), (2) ve (2′′) eşitsizliklerinin denk olduğunu gösterir.

İspat. İspatı üç aşamada yapalım.

I. $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ alalım ve her $x_1, x_2, \cdots, x_n$ için

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \quad (3)$$

olduğunu görelim. İlk önce tümevarım uygulayarak (3) eşitsizliğini $n = 2^m, (m \in \mathrm{N})$ biçimindeki sayılar için yapalım. $m = 1$ için konveksliğin tanımındaki (1) eşitsizliği elde edilir. Şimdi, $n = 2^m, (m \geq 1)$ için (3) 'ün doğruluğunu varsayalım ve $n = 2^{m+1}$ için kanıtlayalım.

$$x' = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^m}}{2^m}$$

ve

$$x'' = \frac{x_{2^m+1} + \cdots + x_{2^{m+1}}}{2^m}$$

dersek, o halde $n = 2^{m+1}$ için

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) = f(\frac{x' + x''}{2}) \geq \frac{f(x') + f(x'')}{2} \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

olur. Böylece, (3) eşitsizliği $n = 2^m$ biçimindeki n 'ler için doğrudur. Şimdi, n sayısı $2^m, (m \in \mathrm{N})$ biçiminde olmasın. Bu takdirde $2^m > n$ sağlanacak biçimde bir $m \in \mathrm{N}$ alalım ve

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

diyelim. O halde

$$A = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (2^m - n).A}{2^m}$$

kesrinin payında tam 2^m tane toplanan bulunduğundan (n tane x_i 'ler ve $(2^m - n)$ tane A) ve 2^m tane toplanan halinde (3) eşitsizliği sağlandığından

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) = f(A) = f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (2^m - n)A}{2^m}) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_m) + (2^m - n)f(A)}{2^m}$$

olur ve buradan da

$$f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

elde edilir. (Akıllıca düşünülmüş bu yöntem dahi matematikçi Cauchy'ye aittir).

II. Şimdi, her $0 < \alpha < 1$ ve her x, y için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad (2'')$$

eşitsizliğinin sağlanacağını görelim. Önce α rasyonel sayı olsun:

$$\alpha = \frac{k}{n}, \qquad (k, n \in \mathrm{N}, k < n).$$

O halde (3) eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= f(\frac{k}{n}x + (1 - \frac{k}{n})y) \\ &= f(\frac{kx + (n-k)y}{n}) \\ &\geq \frac{kf(x) + (n-k)f(y)}{n} \\ &= \frac{k}{n}f(x) + (1 - \frac{k}{n})f(y) \\ &= \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) . \end{aligned}$$

Böylece, her rasyonel $0 < \alpha < 1$ için (2′′) eşitsizliği doğrudur. Öte yandan, her irrasyonel sayıya rasyonel sayılar dizisi ile yaklaşabileceğimizden ve f sürekli olduğundan, (2′′) eşitsizliği her irrasyonel (ve dolayısıyla, her reel) $\alpha : 0 < \alpha < 1$ sayısı için de doğru olacaktır.

III. Nihayet, esas amacımız olan (2) eşitsizliğini ispatlayalım. Kolayca anlaşılabileceği üzere, $n = 3$ durumunu incelemek yeter. (Genel hal tümevarımla kanıtlanabilir.)

Negatif olmayan p_1, p_2, p_3 sayıları

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

eşitliğini sağlasın. Bu durumda

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)$$

$$= f(p_1x_1 + (1-p_1).\tfrac{p_2x_2+p_3x_3}{1-p_1}) \geq \cdots$$

$[(2'')$ eşitsizliğini $\alpha = p_1$ için uyguluyoruz!$]$

$$\cdots \geq p_1f(x_1) + (1-p_1)f(\tfrac{p_2}{1-p_1}x_2 + \tfrac{p_3}{1-p_1}x_3)$$

olur. Sonuncu ifadeye yine $(2'')$ eşitsizliğini uygularsak

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)$$

$$\geq p_1f(x_1) + (1-p_1)[\tfrac{p_2}{1-p_1}f(x_2) + \tfrac{p_3}{1-p_1}f(x_3)]$$

$$= p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + p_3f(x_3)$$

elde ederiz.

Not 4. Teoremde p_i 'ler üzerine konulmuş

$$p_i \geq 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ve

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

kısıtlaması çok önemlidir. Eğer bu kısıtlamalar kalkarsa, $(2'')$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar sınıfı çok fakir olur ve sadece, afin-doğrusal fonksiyonları (yani, $y = ax + b$ fonksiyonlarını) içerir. Bu çok ilginç sonucu bir teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem 2. Eğer f fonksiyonu

$$f(px + (1-p)y) \geq pf(x) + (1-p)f(y) \qquad (4)$$

eşitsizliğini her x, y, $p \in \mathbf{R}$ için sağlarsa, $f(x) = ax + b$ sağlanacak biçimde a ve b sabitleri vardır.

İspat. $c = px + (1-p)y$ diyelim. $p \neq 0$ için

$$x = \frac{1}{p}c + (1 - \frac{1}{p})y$$

olur ve (4) eşitsizliğinden

$$f(x) = f(\tfrac{1}{p}c + (1-\tfrac{1}{p})y)$$

$$\geq \tfrac{1}{p}f(c) + (1-\tfrac{1}{p})f(y)$$

ve sonuncudan da her $p > 0$ için

$$f(c) \leq pf(x) + (1-p)f(y)$$

olur. Yani,

$$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y). \qquad (5)$$

(4) ve (5) eşitsizliğinden, her $p > 0$ ve $x, y \in \mathbf{R}$ için

$$f(px + (1-p)y) = pf(x) + (1-p)f(y) \qquad (6)$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikte $p = x$, $a = 1$, $b = 0$ koyarsak, her $x > 0$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= xf(1) + (1-x)f(0) \\ &= [f(1) - f(0)]x + f(0) \\ &= ax + b \end{aligned}$$

olur. Şimdi de (6) 'da $1 - p = x, a = 0, b = 1$ koyarsak, her $x < 1$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)f(0) + xf(1) \\ &= [f(1) - f(0)]x + f(0) \\ &= ax + b \end{aligned}$$

olur. Böylece, her $x \in \mathbf{R}$ için $f(x) = ax + b$ dir.

Jensen eşitsizliğinden bir çok ünlü eşitsizlik, örneğin, Aritmetik-Geometrik Ortalama, Cauchy-Bunyakovski-Schwartz, Young ve diğerleri, özel hal olarak elde edilebilir.

$$f(x) = \ln x, \quad p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$$

dersek, (2) 'den

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq$$

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n}$$

ve buradan da iyi bildiğiniz

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2) eşitsizliğinde $f(x) = -x^2$ koyarsak, her $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ve $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ eşitliğini sağlayan her $p_i \geq 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$ için

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)^2 \geq p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \cdots + p_nx_n^2$$

olur. Sonuncuda $x_k = \frac{a_k}{b_k}$ ve

$$p_k = b_k^2(b_1^2 + \cdots + b_n^2)^{-1}, (k = 1, \cdots, n)$$

yazarsak, Cauchy-Bunyakovski-Schwartz eşitsizliği elde edilir:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Yine (2″) eşitsizliğinde $f(x) = ln\, x$ alırsak, her x, $y \in (0, \infty)$ ve

$$\alpha > 0\ ,\ \beta > 0\ ,\ \alpha + \beta = 1$$

için

$$ln\,(\alpha x + \beta y) \geq \alpha ln\, x + \beta ln\, y = ln\,(x^\alpha y^\beta) \Rightarrow$$

$$\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta \Rightarrow \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} + \beta y^{\frac{1}{\beta}} \geq xy$$

elde edilir. Sonuncuda $\frac{1}{\alpha} = p, \frac{1}{\beta} = q$ dersek,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitliğini sağlayan her $p > 1, q > 1$ ve $x \geq 0, y \geq 0$ için

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$$

eşitsizliğini (Young eşitsizliği) elde ederiz.

Jensen eşitsizliği, yukarda adları geçen eşitsizliklerin her birinden daha genel bir eşitsizlik olduğundan, doğal olarak, söz konusu eşitsizliklerden daha geniş uygulama alanına sahiptir. Bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek. x, y ve z, $[0, \pi]$ aralığından alınmış herhangi sayılar olmak üzere,

$$\sin x + \sin y + \sin z \leq 3.\sin\tfrac{x+y+z}{3} \quad (7)$$

eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayalım.

Yukarıda adları geçen eşitsizlikler (Aritmetik-Geometrik Ortalama vb) burada bir sonuç vermezler. Ancak (7) eşitsizliği, Jensen eşitsizliğinin basit bir sonucudur: (2) eşitsizliğinde $f(x) = \sin x$ ve $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ almak yeter. (Fakat bu söylediklerimiz, (7) eşitsizliğinin, Jensen eşitsizliği kullanılmaksızın ispatlanamayacağı anlamına gelmez. Örneğin, türev tekniği kullanılarak da aynı problem çözülebilir: [3] 'te 4.70 no'lu problemin çözümüne bakınız.)

Sonda, alıştırma olarak, Jensen eşitsizliği kullanılarak kanıtlanabilen bir kaç eşitsizlik verelim:

(a) $2\sqrt[2]{2} + 3\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[5]{5} \geq 10\sqrt[10]{30}$

(b)

$$1000x^{\frac{1}{1000}} + 998y^{\frac{1}{998}} \geq 1998(xy)^{\frac{1}{1998}}, (x, y \geq 0);$$

(c) Negatif olmayan her $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ve doğal sayılar $p_1, p_2, \cdots, p_n$ için

$$p_1a_1^{\frac{1}{p_1}} + p_2a_2^{\frac{1}{p_2}} + \cdots + p_na_n^{\frac{1}{p_n}} \geq p(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{p}}.$$

Burada $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ 'dir.

[(a) ve (b) 'nin (c) 'nin özel halleri olduğuna dikkat ediniz!]

(d) Her $\alpha, \beta, \gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ için

$$\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma \leq \cos^3\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

KAYNAKÇA

[1] I. P. Natanson; Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi; Moskova, "Nauka", 1974.

[2] H. Turgay Kaptanoğlu, Dışbükey fonksiyonlar, *Matematik Dünyası*, **6-1** 11-18 (1996).

[3] Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev: Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri; Ankara, TÜBİTAK, 1998.