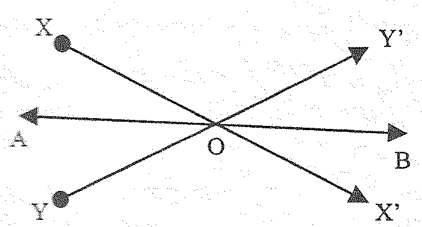
DOĞRUDAŞ NOKTALAR VE MASMİS TEOREMİ

İsmail Haltaş
ODTÜ, Fizik Bölümü, ANKARA

Geometriye ilgisi olanların, özellikle olimpiyat problemleri ile uğraşmaktan zevk alan geometriseverlerin sıkça karşılaştıkları bir ifade "bahsedilen üç noktanın doğrusal olduğunu gösteriniz" dir. Üç noktanın doğrusallığını ispatlamak için bir çok yöntem kullanılabilir. Ben bu yöntemlerden; hak ettği kadar meşhur olamamış, fakat pek çok meşhur yöntemden daha kullanışlı bir tanesini size tanıtmaya çalışacağım.

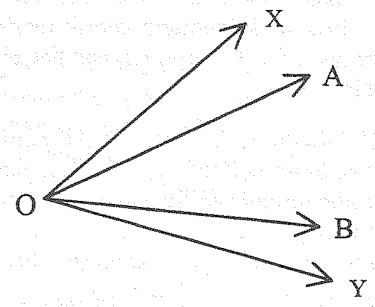
Bu metot genel olarak üçgende Sinüs Teoremi ve Seva' nın trigonometrik hali üzerinde kurulmuştur. İspatlar, Masmis olarak adlandırdığım bir teorem sayesinde kolayca çözülebilmektedir. Bu metodun kullanımı ile ilgili sorulara geçmeden önce kısaca nasıl bir yöntem izleyeceğimizden bahsedelim.

Durum 1. Şekil 1'de görüldüğü gibi XX' ve YY' ışınları bir 0 noktasında kesişsin ve A, O, B noktalarının doğrusal olduğunu ispatlamamız istensin.



Şekil 1

Durum 2. Şekil 2'de görülen O, A ve B noktalarının doğrusal olduğunu ispatlamamız istensin.



Şekil 2

1. Durum için yapmamız gereken yalnızca $X\hat{O}A = X'\hat{O}B$ veya $Y\hat{O}A = Y'\hat{O}B$ olduğunu görmemiz, 2. durum için ise, $X\hat{O}A = X\hat{O}B$ veya $Y\hat{O}A = Y\hat{O}B$ olduğunu göstermemizdir.

Şimdi Masmis Teoremini tanıtalım:

Masmis Teoremi. α, α', θ, θ' pozitif açıları; $\alpha + \theta = \alpha' + \theta'$ ve

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\theta'}$$

koşullarını sağlarsa, $\alpha = \alpha'$ ve $\theta = \theta'$ eşitlikleri de geçerlidir.

İspat.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\theta'} \Rightarrow \sin\alpha\sin\theta' = \sin\theta\sin\alpha'$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\theta') = \tfrac{1}{2}(\cos(\theta-\alpha'))$$

$$\Rightarrow$$

$$\cos(\alpha-\theta') - \cos(\theta-\alpha') - \cos(\theta+\alpha') \; .$$

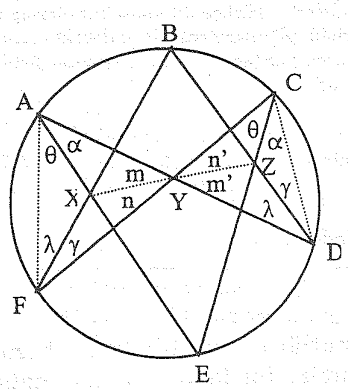
$\alpha + \theta = \alpha' + \theta'$ olduğu verilmiş, buradan $\alpha - \theta' = \alpha' + \theta$ ve $\cos(\alpha-\theta') = \cos(\alpha'-\theta) =$

$\cos(\theta - \alpha')$ olur. $\cos(\alpha - \theta') = \cos(\theta - \alpha')$ eşitliğini yerine yazarsak $\cos(\alpha-\theta') = \cos(\theta-\alpha')$ bulunur. Buradan ise $\alpha+\theta' = \theta+\alpha'$ veya $\alpha + \theta' = -\theta + \alpha'$ bulunur. $\alpha, \theta, \theta', \alpha' > 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\alpha + \theta' = \theta + \alpha'$ bulunur. $\alpha+\theta = \theta'+\alpha'$ olduğunu biliyorduk, bu iki eşitlikten $\alpha + \alpha'$ ve $\theta = \theta'$ bulunur. Böylece ispatımız tamamlanır.

Şimdi Masmis Teoremini de kullanabileceğimiz örnek sorulara geçelim. İlk olarak Pascal Teoremi olarak bilinen bir doğrusallık sorusuna kolay bir ispat sunacağız.

Pascal Teoremi. Bir çemberin üzerinde çakışık olmayan ve verilen sırasıyla dizilmiş altı nokta A, B, C, D, E ve F olsun. $AE \cap BF = X$, $BD \cap CE = Z$, $AD \cap CF = Y$ olmak üzere X, Y, Z doğrusaldır.

İspat.



Şekil 3

İlk olarak çembersellikten eşit olan açıları yazalım. Şekil 3' de görüldüğü gibi Durum 1' den $m = m'$ veya $n = n'$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\overset{\triangle}{AYF}$ ve $\overset{\triangle}{CYD}$ üçgenlerinde Seva Teoreminin trigonometrik halini yazdığımızda,

$$\overset{\triangle}{AYF} \rightarrow \frac{\sin n \sin \lambda \sin \alpha}{\sin m \sin \gamma \sin \theta} = 1$$

ve

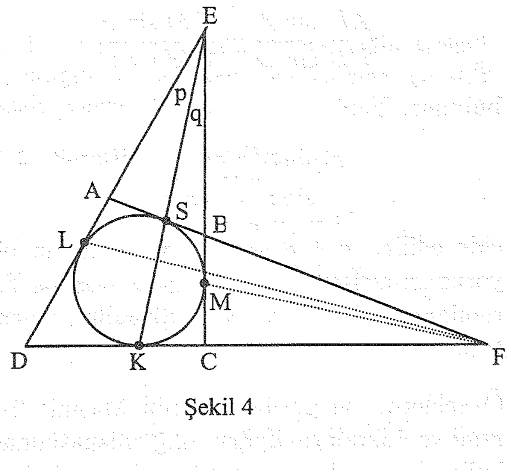
$$\overset{\triangle}{CYD} \rightarrow \frac{\sin n' \sin \lambda \sin \alpha}{\sin m' \sin \gamma \sin \theta} = 1 .$$

İki ifadeyi eşitlersek $\frac{\sin n}{\sin m} = \frac{\sin n'}{\sin m'}$ bulunur. Ayrıca $m + n = m' + n'$ ve m, n, n', $m' > 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda Masmis Teoreminden $m = m'$ ve $n = n'$ olur ve ispatımız tamamlanır.

İkinci örneğimiz 1996 Bilim Olimpiyatları Matematik hazırlama programı içerisinde yapılmış olan Kocaeli Yaz Kampı Kampsonu sınavının altıncı sorusudur.

Soru. $ABCD$ teğetler dörtgeninde $AD \cap BC = E$, $AB \cap DC = F$ ve içteğet çemberin AB, BC, CD ve DA kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla S, M, K ve L 'dir. E, S, K noktaları doğrusal ise, F, M, L noktalarının da doğrusal olduğunu gösteriniz.

İspat.



Şekil 4

Bu soru da Durum 2 ile benzeşmektedir. $\hat{AFL} = \alpha'$, $\hat{DFL} = \theta'$ dersek, $\alpha = \alpha'$ veya $\theta =$

θ' olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\overset{\triangle}{AEB}$ üçgeninde Sinüs Teoreminden,

$$\frac{\sin p}{\sin q} = \frac{AS}{BS}.\frac{\sin A}{\sin B}$$

$\overset{\triangle}{AEC}$ üçgeninde Sinüs Teoreminden,

$$\frac{\sin p}{\sin q} = \frac{DK}{CK}.\frac{\sin D}{\sin C}$$

bulunur. $\overset{\triangle}{BFC}$ üçgeninde Sinüs Teoreminden,

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \theta'} = \frac{BM}{CM}.\frac{\sin B}{\sin C}$$

$\overset{\triangle}{AFD}$ üçgeninde Sinüs Teoreminden,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{AL}{DL}.\frac{\sin A}{\sin D}$$

bulunur. İlk iki denklem eşitlendiğinde ve $AS = AL$, $BS = BM$, $DK = DL$, $CK = CM$ eşitlikleri yerlerine yazıldığında,

$$\frac{AL}{BM}.\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{DL}{CM}\frac{\sin D}{\sin C}$$

bulunur. Buradan ise,

$$\frac{AL}{DL}.\frac{\sin A}{\sin D} = \frac{BM}{CM}\frac{\sin B}{\sin C}$$

bulunur. Yani

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \theta'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$$

elde edilir. $\alpha + \theta = \alpha' + \theta'$ olduğunu biliyoruz ve açılar pozitif. Böylece Masmis Teoreminden $\alpha = \alpha'$ ve $\theta = \theta'$ bulunur, ispat tamamlanmış olur.

Örneklerde de görüldüğü gibi Masmis Teoremi ve noktaların doğrusallığını ispatlamada kullanılabilecek bu metot bazı önermelerin ispatlarına çok basit çözümler getirmektedir. Bu metodun okuyucular tarafından benimsenip kullanılmasını umuyorum.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

adresine gönderilecektir.

Matematiği büyük bir kente benzetmek mümkündür; bu kentin kenar mahalleleri durmadan genişlemekte ve nüfusu artmakta, buna paralel olarak, zaman-zaman, her defasında daha açık ve görkemli bir planla, kent merkezi yeniden inşa ve restore edilmekte, zik-zaklı ve yıpranmış döngülerle dopdolu eski mahalleler yıkılıp kentin dışına doğru daha geniş, daha düz ve rahat caddeler açılmaktadır...

N. Bourbaki