ÜÇÜNCÜ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI BİRİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş - İlham Aliyev

İlki 1996 yılında yapılan Antalya Matematik Olimpiyadının üçüncüsünün birinci seçme sınavı, Matematik Dünyasının bundan önceki sayısında (Cilt 7, Sayı 1) duyurulduğu gibi, 7 Mart 1998 Cumartesi günü yapıldı.

Akdeniz Üniversitesi Sağlık Kültür ve Spor Dairesi - Matematik Kulübü tarafından düzenlenen Antalya Matematik Olimpiyatları, Akdeniz Üniversitesi Rektörlüğü, Antalya Eğitim ve Araştırma Vakfı ve Akdeniz Üniversitesi Sosyal Dayanışma Derneği tarafından desteklenmekte; Lise III öğrencilerinden dereceye girenlere bu kurumlarca öğrenim bursları verilmekte, Lise I-II öğrencilerinden dereceye girenlere de çeşitli ödüller verilmektedir. Yediyüze yakın yarışmacının katıldığı seçme sınavı Lise I-II ve Lise III adıyla iki kategoride yapıldı. Lise I-II ve Lise III öğrencilerine ayrı testler verildi, ancak testlerin 8 'er sorusu ortak idi. Sınava, çok az olmakla beraber bazı liselerin hazırlık sınıfından da öğrenciler katıldı. Lise I, Lise II ve Lise III öğrencilerinden birinci seçme sınavında başarılı olanlar 25 Nisan 1998 Cumartesi günü yapılacak ikinci sınava çağrılacaklar. Hazırlık sınıfından katılan öğrenciler başarılı bulundukları takdirde ikinci sınavda Lise I öğrencileri ile birlikte yarışacaklar.

Birinci Seçme Sınavında sorulan sorulardan bazılarını çözümleri ile birlikte sunuyoruz.

Lise I-II, Soru 1.

$T = 1! + 2! + 3! + \cdots + 1997! + 1998!$ toplamının son iki basamağındaki rakamların toplamı kaçtır?

A) 13 B) 9 C) 6 D) 4 E) Hiçbiri

Yanıt. 10! 'den sonra gelen terimlerin son iki basamağı 00 olduğundan sadece

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9!$$

toplamının son iki basamağına bakmak yeter, ki bu da

$$1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80$$

toplamının son iki basamağı, yani 13 ile aynıdır. Yanıt $1 + 3 = 4$ tür, D seçeneği.

Lise I-II, Soru 2.

$A = 2^{1998}$ sayısının onluk sayı sistemindeki yazılışında en baştaki rakam silinip en sona yazılarak B sayısı elde ediliyor. $|A - B|$ 'nin rakamları toplamına a, a nın rakamları toplamına b, b nin rakamlar toplamına c denirse c nin rakamlar toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 18 C) 9 D) 19 E) 1+9+9+8

Yanıt. $|A - B|$ 'nin rakamları toplamı 9 un bir katı olacaktır. c sayısının bir basamaklı olacağını görmek zor değildir. Dolayısıyla, doğru yanıt C seçeneğindeki 9 dur.

Lise I-II, Soru 6.

$[a]$ ile a reel sayısının tam kısmı gösterilmek üzere $x - [x] = [(0,5)x - 2]$ denkleminin reel çözümlerinin sayısı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Sonsuz

(Bu soru Lise III 'lerin 3 no'lu sorusudur.)

Yanıt. Denkleme dikkatle bakılırsa $x = [x] + [(0,5)x - 2]$ sayısının tamsayı olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$0 = x - [x] = [(0,5)x - 2]$$

ve buradan

$$\begin{aligned} 0 &\le (0,5)x - 2 < 1, \\ 2 &\le (0,5)x \le 3, \\ 4 &\le x < 6, \\ x &\in \{4,5\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Doğru yanıt **D** seçeneğindeki 2 'dir.

Lise I-II, Soru 8.

Bir dizinin ilk terimi 1 'dir ve her $n \geq 2$ için ilk n teriminin çarpımı n^2 'dir. Dizinin altıncı ve onbirinci terimlerinin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) $\frac{50}{27}$ D) $\frac{53}{20}$ E) $\frac{121}{36}$

Yanıt. Dizinin n- inci terimi a_n olmak üzere,

$$a_n = \frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{a_1a_2\cdots a_{n-1}} = \frac{n^2}{(n-1)^2}$$

dir. O halde,

$$a_6 + a_{11} = \frac{6^2}{5^2} + \frac{11^2}{10^2} = \frac{53}{20}$$

ve doğru yanıt **D** seçeneğidir.

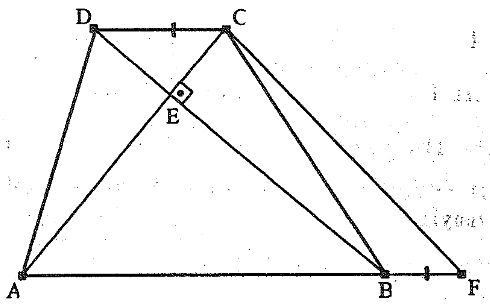
Lise I-II, Soru 10.

Bir $ABCD$ yamuğunun köşegenleri birbirine dik olmak üzere, uzunlukları 5 ve 12 'dir. Yamuğun orta tabanının uzunluğu kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 6,5 D) 8,5 E) 8

(Bu soru Lise III lerin 8 no'lu sorusudur.)

Yanıt. [AB] 'yi sağa doğru $|DC|$ kadar uzatarak F noktasını bulalım. Bu takdirde, $DBFC$ bir paralelkenar olur. Pisagor Teoremi ile,



$$\begin{aligned} |AF|^2 &= |AC|^2 + |CF|^2 \\ &= |AC|^2 + |DB|^2 \\ &= 5^2 + 12^2 = 169. \end{aligned}$$

Böylece, $|AF| = |AB| + |BF| = 13$ ve yamuğun orta tabanı

$$\frac{|AB| + |DC|}{2} = \frac{|AB| + |BF|}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$$

olur. Doğru yanıt **C** seçeneğindeki 6, 5 'tir.

Lise I-II, Soru 11.

$x^2 + ax + 3a = 0$ denkleminin kökleri tamsayı ise a reel sayısının alabileceği değerler sayısı kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 1

Yanıt. Denklemin kökleri toplamı $-a$ ya eşit olduğundan, a bir tamsayı olmak zorundadır. Denklemden

$$a = -\frac{x^2}{x+3} = 3 - x - \frac{9}{x+3}$$

olur ve buradan da $(x+3)$' ün alabileceği değerlerin $\mp 1, \mp 3, \mp 9$ olduğu görülür. Basit hesaplamalardan sonra a için dört ayrı değer bulunur: $-4, 0, 12, 16$. Doğru yanıt **D** seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 12.

$x^2 + y^2 = x^3$ denklemini sağlayan (x, y) doğal sayı ikililerin sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) Sonsuz E) Hiçbiri

(Bu soru Lise III 'lerin 10 no'lu sorusudur.)

Yanıt. $y^2 = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ eşitliğinde $x - 1 = k^2$, dolayısıyla, $x = k^2 + 1$ olursa, $y = k(k^2+1)$ $(k \in \mathbb{N})$ olur. Yani denklemin doğal sayılarda sonsuz çoklukta çözümü vardır. Doğru yanıt **D** seçeneğidir.

Lise I-II, Soru 14.

$101.102.103\cdots 300 = 7^k.n;\ k, n \in \mathbb{N}$ eşitliğini sağlayan en büyük k sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 26 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

(Bu soru Lise III 'lerin 12 no'lu sorusudur ve ne yazık ki, Lise III soru kağıdında doğru yanıt olan 32 yerine 33 verilmiş, bu nedenle bu soruya Lise III 'lerin tümünün doğru yanıt verdiği kabul edilmiştir.)

Yanıt. Her m doğal sayısı için $m = 7^r.n$ eşitliğini sağlayan en büyük r sayısı

$$r = [\frac{m}{7}] + [\frac{m}{7^2}] + \cdots + [\frac{m}{7^t}] + \cdots$$

toplamı hesaplanarak bulunur. Bu yolla $300! = 7^r.n$ eşitliğini sağlayan en büyük r sayısı 48; $100! = 7^r.n$ eşitliğini sağlayan en büyük r sayısı da 16 dır. Buradan, istenilen k sayısının 32 olduğu görülür. Doğru yanıt **E** seçeneğindeki 32 'dir.

Lise III, Soru 7.

$2x^2 - 3x = 2x.\sqrt{x^2-3x} + 1$ denkleminin kaç reel çözümü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Sonsuz

Yanıt. Verilen denklemi

$$x^2 - 2x\sqrt{x^2-3x} + (x^2 - 3x) = 1,$$

$$(x - \sqrt{x^2-3x})^2 = 1$$

biçiminde yazarsak, $x - \sqrt{x^2-3x} = \mp 1$ elde ederiz. $x - \sqrt{x^2-3x} = 1$ denkleminin hiç reel çözümü yok; $x^2 - \sqrt{x^2-3x} = -1$ denkleminin ise tek reel çözümü vardır: $x = -\frac{1}{5}$. Doğru yanıt **B** seçeneğindeki 1 'dir.

Lise III, Soru 9.

Her üçü de sıfırdan farklı $x(y-z)$, $y(z-x)$, $z(x-y)$ sayıları bir geometrik dizi oluşturmaktadır. Dizi çarpanı q ise, q aşağıdakilerden hangisini sağlar?

A) $q^4 + q^2 - 1 = 0$ B) $q^4 - q^2 + 1 = 0$
C) $q^2 - q - 1 = 0$ D) $q^2 - q + 1 = 0$
E) $q^2 + q + 1 = 0$

Yanıt. Çok zor gibi görünen bu sorunun hilesi verilen terimlerin toplamının sıfır olmasdır:

$$x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = 0$$

Buradan uygun bir $a \neq 0$ için $a + aq + aq^2 = 0$, ve böylece $q^2 + q + 1 = 0$ olduğu görülür. Doğru yanıt **E** 'dir.

Lise III, Soru 17.

$P(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^{99}+x^{100})^3$ polinomunda parantezler açıldıktan sonra, x^{111} in katsayısı ne olacaktır?

A) 6432 B) 6328 C) 6130 D) 5640 E) 5600

(Bu soru Lise I-II 'lerin 15 no'lu sorusudur ve ne yazık ki, her iki kategoride de doğru seçenek olması gereken **C** seçeneği eksik yazıldığından bu soruyu tüm yarışmacıların doğru yanıtladığı kabul edilmiştir.)

Yanıt. $P(x)$ için verilen ifade

$$P(x) = (1+x+\cdots+x^{100})(1+x+\cdots+x^{100})(1+x+\cdots+x^{100})$$

çarpımı olarak düşünülürse, bu çarpımın açılmasıyla elde edilen

$$x^{p+q+r},\ 0 \le p,\ q,\ r \le 100,$$

terimlerinden $p+r+q = 111$ olanların sayısını belirlememiz gerekmektedir. p, q ve r, 111 'e kadar değerler alabilseydi, bu sayı

$$\binom{111+3-1}{2} = \frac{111.112}{2} = 6328$$

olurdu. Ancak p, q ve r en çok 100 değerini alabilirler, bu nedenle bu sayıdan

$$3.(1+2+\cdots+10+11) = 198$$

sayısını çıkarmalıyız. (Bunun nedenini düşününüz!) Böylece, doğru yanıt 6130 'dur; **C** seçeneği.

Lise III, Soru 18.

$N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ olmak üzere $f : N_0 \times N_0 \to N_0$ fonksiyonu her $(x, y) \in N_0 \times N_0$ için

$$f(0,y) = y+1$$
$$f(x+1,0) = f(x,1)$$
$$f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y))$$

eşitliklerini sağlamaktadır. $f(1, 1998)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1998 B) 1999 C) 2000 D) 2002 E) Hiçbiri

Yanıt. $f(1,0) = f(0,1) = 2;$

$f(1,1) = f(0, f(1,0)) = f(0,2) = 3;$
$f(1,2) = f(0, f(1,1)) = f(0,3) = 4.$

Tümevarımla, $f(1,x) = x+2$ olduğu görülür. Demek ki, $f(1,1998) = 2000$ 'dir. Doğru yanıt C seçeneğidir.

Lise III, Soru 19.

İki çocuk birlikte 10 menekşe, 15 lale, 14 karanfil topladı. Her çocuğa, her çicekten en az 3 er tane düşmek üzere, tüm çiçekler kaç farklı şekilde bölüştürülebilir?

A) 2640 B) 1998 C) 900 D) 450 E) 120

(Bu soru Lise I-II 'lerin 20 no'lu sorusudur.)

Yanıt. Çocuklar her çiçekten 3 er tane aldıktan sonra, geriye $10-6=4$ menekşe, $15-6=9$ lale, $14-6=8$ karanfil kalır. Bu çiçekler iki çocuk arasında

$$(4+1)(9+1)(8+1) = 450$$

farklı biçimde dağıtılabilir. Doğru yanıt **D** 'dir.

Lise III, Soru 20.

Reel sayıların bir geometrik dizisinde ilk 2 terimin toplamı 7 ve ilk 6 terimin toplamı da 91 'dir. İlk 4 terimin toplamı kaçtır?

A) 25 B) 28 C) 32 D) 35 E) 49

Yanıt. Verilere göre

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+aq=7 & \Rightarrow & a.(1+q)=7 \\ a+aq+\ldots+aq^5=91 & \Rightarrow & a.\frac{q^6-1}{q-1}=91 \end{array}\right\}$$

Taraf tarafa bölersek,

$$\frac{(q^2-1)(q^4+q^2+1)}{q^2-1} = \frac{91}{7} = 13$$

$$\Rightarrow q^4+q^2+1=13 \Rightarrow q^2=3$$

bulunur. Böylece, ilk 4 terimin toplamı,

$$a+aq+aq^2+aq^3 = (a+aq)(1+q^2) = 7.4 = 28$$

olarak bulunur. Doğru yanıt **B** 'dir.

Lise I-II kategorisinde sorulan ve olimpiyadın en basit sorusu olan 16 no'lu sorunun cevabı seçenekler arasında verilmediğinden bu sorunun da tüm yarışmacılar tarafından doğru çözüldüğü kabul edilmiştir. (Sözkonusu soruyu hatırlatalım: $0,1,2,3,4,5$ rakamları kullanılarak yazılabilen tüm dört basamaklı çift sayıların en baştaki rakamlarının toplamı nedir?) Böylece, yukarıda belirtilenlerle birlikte, Lise I-II kategorisinde 15 ve 16 no'lu sorular, Lise III kategorisinde ise 12 ve 17 no'lu soruların her yarışmacı tarafından doğru çözüldüğü kabul edilmiştir. Antalya Matematik Olimpiyadı jürisinin, bu satırların yazarları dahil, daha dikkatli olmasını ve gelecek olimpiyatlarda hatasız sorular üretmesini, Antalya Matematik Olimpiyatlarının süreklilik kazanmasını diliyoruz.