HİNDİSTAN CEVİZLERİ... VE DİYOFANT DENKLEMLERİ

Doğan Çoker
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Giriş

Yazımızın amacı Sayılar Kuramında geçen önemli bir kavram olan **diyofant denklemleri** [5,7] konusuna kısa bir giriş yapmak. Burada, okuyucuya kuralların tümünü vereceğimiz diye bir kaygımız olmayacaktır. Onun yerine, okuyucudan, verilen temel kavramları üstüste koyarak yeni yöntemleri kendi elleriyle kurabilmesi yönünde çaba harcamasını isteyeceğiz. Bu konuya bulmaca tarihinin belki de en ünlü problemi ile başlamak istiyoruz. Aşağıda öyküleyeceğimiz bulmaca ilk kez 1926 yılında "Saturday Evening Post" gazetesinde "Ben Ames Williams" adlı bir yazarca yayınlanan "Hindistan Cevizleri" adlı bir kısa öyküye dayanmaktadır ve olağanüstü ölçüde büyük bir ilgi kazanarak ününü günümüze dek sürdürmüştür [4].

Hindistan Cevizleri Bulmacası

Tekneleri batan 5 gemici güçlükle küçük bir adaya yüzerek çıkarlar. Gece olunca çok yorgun oldukları için adada bulunan hindistan cevizi ağacına çıkıp uyurlar. Uykuya dalan gemicilerden birincisi açlık nedeniyle uyanıp ağaçtaki hindistan cevizlerini 5'e bölüp kendi payına düşeni yer, bu arada artmış olan bir hindistan cevizini de ağaçtaki maymuna verip yeniden yatar. Bunun ardından, sırayla, 2.gemici, 3.gemici, 4.gemici ve 5.gemici uyanır, ağaçta kalan hindistan cevizlerini 5'e bölüp kendi payını yer, her bir paylaşımda artan bir hindistan cevizini ağaçtaki maymuna verip yeniden yatar. Sabah olunca hepsi birden uyanan gemiciler kendi paylarına düşen hindistan cevizlerini yediklerini belirtince işin içinden çıkamaz ve bu kez ağaçta kalan hindistan cevizlerini 5'e bölüp bunları yerler ve bu arada artan son hindistan cevizini de ağaçtaki maymuna verirler. Doğal olarak bu öyküde sorulabilecek olan soru şu: **Acaba ilk başlangıçta ağaçta toplam kaç tane hindistan cevizi vardı?**

Bulmacaya saldırmanın en iyi yolu değişkenlerimize ad vermek olmalı. Başlangıçta ağaçta bulunan hindistan cevizi sayısını x ile, 1.adımda 1.gemicinin yediği hindistan cevizleri sayısını x_1 ile, 2.adımda 2.gemicinin yediklerini x_2 ile, ..., 5.adımda 5.gemicinin yediklerini x_5 ile ve son ortak paylaşımda her bir gemicinin yediklerini t ile gösterecek olursak, çözmemiz gereken denklem,

$$x = 5x_1 + 1, \ \ 4x_1 = 5x_2 + 1, \ \ 4x_2 = 5x_3 + 1,$$

$$4x_3 = 5x_4 + 1, \ \ 4x_4 = 5x_5 + 1, \ \ 4x_5 = 5t + 1$$

paylaşımlarını yaptıktan sonra ara değişkenleri elersek,

$$1024x = 15625t + 11529$$

biçimine dönüşecektir. Buradan da görülebileceği gibi, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 değişkenleri artık önemlerini yitirmekte, ve sorunumuz t ve sonuçta x değişkeninin bulunmasına indirgenmektedir. Yazmış olduğumuz denklem, gerçekte, bir **diyofant denklemi** olup denklemin katsayılarının birer tamsayı olmasının yanısıra denklemin aranan çözümleri de birer tamsayı olmak durumundadır. Burada geçen "diyofant" sözcüğü Yunanlı matematikçi **Diohhantos** (İ.S. 325-410) 'un adından kaynaklanmaktadır. Belirtmiş olduğumuz bu iki özellik diyofant denklemlerinin bir yerde tanımını oluştururlar. Siz alışmış olduğunuz gibi, katsayıları tamsayı olan iki bilinmeyenli bir doğrusal denklemle karşılaştığınızda bunun gerçel sayılar içinde sonsuz sayıda çözümünün bulunduğunu bilirsiniz. Ancak çözümün tamsayılar olması zorunluluğu çözümlerin sayısını büyük ölçüde kısıtlayacaktır.

olacak biçimde bir x_1 rasyonel sayısının varlığıdır. Burada $[|x|]$, x 'ten küçük ya da eşit olan en büyük tamsayıyı göstermektedir. Örneğin

$$\frac{215}{48} = 4 + \frac{1}{\frac{48}{23}}$$

gibi. Bunun ardından anlatılan olayı, sonuçta en sağ yanda bir tamsayının çarpımsal tersi gelene dek yinelersek, istenilen "sürekli kesiri" elde edebilirsiniz. Önceki örneği sürdürecek olursak, şu işlemleri yapmamız gerekecektir:

$$\frac{215}{48} = 4 + \frac{1}{\frac{48}{23}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{2}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}}.$$

Böylece, sonuçta, istenen kesiri

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}}$$

diye bir sürekli kesire dönüştürmüş oluruz. Cebirciler yukarda vermiş olduğumuz sürekli kesiri, genellikle, $\frac{215}{48} = [4, 2, 11, 2]$ biçiminde gösterirler.

Bu yaptığımızla diyofant denklemlerinin ilişkisi nedir diye kendinize soru sorduğunuzu duyar gibiyim; ancak bunun nedenini öğrenmek istiyorsanız yazıyı okumayı sürdürmeniz gerekecektir. Bu iş için, $\frac{215}{48}$ sayısının "sürekli kesir" olarak yazılışında sağdaki gösterimde son kesir olan $\frac{1}{2}$ sayısının atılmasıyla elde edilen

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{11}} = 4 + \frac{11}{23} = \frac{103}{23}$$

rasyonel sayısının (bir başka deyişle $[4, 2, 11]$ sayısının) bizim açımızdan, oldukça güzel bir sayı olduğunu gözlemlememiz gerekir. Gerçekten her iki sayıyı birbirinden çıkartırsak

$$\frac{215}{48} - \frac{103}{23} = \frac{1}{48 \cdot 23} \quad \text{ya da başka bir deyişle,} \quad 215 \cdot 23 + 48 \cdot (-103) = 1$$

bulunur. Son yazılan eşitlik, umarım, çok hoşunuza gitmiştir. Bunu $215x + 48y = 1$ denklemiyle karşılaştıracak olursanız, çözümünü aradığımız denklemin özel bir çözümünün $x_0 = 23$, $y_0 = -103$ olduğunu görebilirsiniz. Böylece denklemimizin genel çözümünü, t parametresi tüm tamsayıları dolaşmak koşuluyla, $x = 23 + 48t$, $y = -103 - 215t$ diye elde ederiz.

Şimdi de Bulmacamızı Çözmeye Girişir misiniz?

Size daha önceden söz vermiş olduğumuz gibi "Hindistan Cevizleri" bulmacasının çözümünü yapmayacağız, ancak çözüme giden yolu sanırım açmış durumdayız. Bunun için sizden şunları isteyeceğiz:

* Doğrusal diyofant denklemlerinin genel biçimini, şimdilik $(a, b) = 1$ varsayımı altında, $ax + by = c$ diye vermiş olmamıza karşın, daha sonra, belirli koşullar altında, $ax + by = 1$ diyofant denklemi ile ilgileneceğimizi söylemiştik. O halde birinci sorumuz şöyle: Eğer $ax + by = 1$ diyofant denkleminin bir özel çözümünü biliyorsanız, $ax + by = c$ diyofant denkleminin özel bir çözümünü nasıl bulursunuz? Örneğin $215x + 48y = 11$ denkleminin özel bir çözümünü bulabilir misiniz?

* $(1024, 15625) = 1$ olduğunu düşünürsek, $1024x - 15625t = 1$ diyofant denkleminin bir özel çözümünü bulabilir misiniz?

* $1024x - 15625t = 11529$ diyofant denkleminin genel çözümünü bulabilir miniz? Sanırım sonsuz sayıda çözüm bulacağınıza göre, bunlar arasında en gerçekçi çözüm hangisi olacaktır?

* "Hindistan Cevizleri" bulmacasının diğer çeşitlemelerini yapmaya ne dersiniz?

* Diyofant denklemlerinin genel çözümleri tamsayılar içinden seçildiğine göre, bunların özel çözümleri arasında eksi tamsayılar da olabilir. Bu gerçeği aklınızdan çıkarmayarak, yazımızın başında söz etmiş olduğumuz "estetik çözümü" bulabilir miniz?

* Şimdi $ax + by = c$ denkleminde $(a, b) = 1$ biçiminde almış olduğumuz kısıtlamayı yok edelim; yani $(a, b) = d$ ve $d \neq 1$ olsun. Bu durumda $a = Ad$ ve $b = Bd$ olup denklemimiz $d(Ax+By) = c$ biçimine girer. O halde $ax + by = c$ diyofant denkleminin en az bir çözümünün olması için gerek ve yeterli koşul nedir? Bulacağınız bu koşul altında, denklemin özel bir çözümü x^*, y^* ise, denklemin genel çözümünü nasıl bulursunuz?

KAYNAKÇA

[1] S. Atabey, 1. Dereceden İki ve Üç Boyutlu Diofant Denklemleri, Matematik Dünyası, 5-1 (1995) 17-18.

[2] S. Atabey, $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ Şeklindeki Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, 5-2 (1995) 19-20.

[3] S. Atabey, İki Üslü Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, 5-4 (1995) 23-24.

[4] M. Gardner, More Mathematical Puzzles and Diversions, Penguin Books, London-Reading-Fakenham, 1971.

[5] A. O. Gelfond, Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi (Diofant Denklemleri), Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı: 8, İstanbul, 1962.

[6] A. Kaya, Sayılar Teorisine Giriş, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No: 112, İzmir, 1988.

[7] B. M. Stewart, Theory of Numbers, The MacMillan Company, New York, 1952.

[8] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Annals of Mathematics (2) 141-3 (1995) 443-551.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

UYARI: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.156. $0 \le a \le 1 \le b \le c < 3$ olmak üzere, kenar uzunlukları a, b, c olan üçgenler içinde en büyük alana sahip üçgenin alanı kaç olabilir?

A.157. 11 111 den 99 999 'a kadar tüm beş basamaklı sayılar, her kart üzerinde birer sayı olmak üzere yazılmış ve bu kartlar rasgele (gelişigüzel) biçimde yanyana dizilmiştir. Bu şekilde elde edilen 444 445 basamaklı sayının 3' ün bir kuvveti olamayacağını kanıtlayınız.

A.158. $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında bulunan α ve β sayıları için

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

A.159. $2^{\sqrt[12]{1998}} + 2^{\sqrt[4]{1998}} \geq 2^{\sqrt[6]{1998}+1}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

A.160. Tüm köşegen ve kenar uzunlukları rasyonel sayılar olan konveks $ABCD$ dörtgeni veriliyor. Köşegenlerin kesişim noktası O olmak üzere, AO doğru parçasının uzunluğunun bir rasyonel sayı olduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.156. n herhangi bir doğal sayı olmak üzere,

$$n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots,\ n+37,\ n+38$$

dizisinde, rakamları toplamı 11 ile bölünen bir sayı bulunduğunu gösteriniz.

Y.157. Konveks $ABCD$ dörtgeninin AB, BC, CD ve DA kenarlarının uzantıları üzerinde

$$\vec{BB'} = \vec{AB},\ \vec{CC'} = \vec{BC},$$

$$\vec{DD'} = \vec{CD},\ \vec{AA'} = \vec{DA}$$

sağlanacak biçimde B', C', D', A' noktaları alınmıştır. A', B', C', D' dörtgeninin alanının $ABCD$ dörtgenin alanının 5 katı olduğunu kanıtlayınız.

Y.158. $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$ sayısının tam kısmının 1998 ile bölünmesinden kalan nedir?

Y.159. Alfa burcunun 1001 gezegenden ibaret bir gezegenler sisteminin her gezegeninde bir astronom, kendi gezegenine en yakın olan gezegeni gözlemektedir. (Gezegenler birbirinden farklı uzaklıktalar.) Astronomların hiç birinin gözlemediği bir gezegenin varlığını kanıtlayınız.

Y.160. Alanı S ve çevre uzunluğu P olan konveks dörtgenin içine, yarıçapı $\frac{S}{P}$ olan bir daireyi (dışarıya taşmaksızın) yerleştirmek mümkündür; kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.146. Bir XY doğrusu köşeleri aynı olan üç dik açının kenarlarını sırasıyla A, B, C, D, E, F noktalarında kesiyorsa

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA} = -1$$

olduğunu gösteriniz. *(Cemil Uğurlu, 1946).*

Çözüm. Sözkonusu üç dik açının ortak köşesi O olmak üzere, $A\hat{O}B = D\hat{O}E = \alpha$, $B\hat{O}C = E\hat{O}F = \beta$ ve $C\hat{O}D = \gamma$ diyelim.

$$|AB|/|BC| = |OA|\sin\alpha/|OC|\sin\beta$$
$$|CD|/|DE| = |OC|\sin\gamma/|OE|\sin\alpha$$
$$|EF|/|FA| = |OE|\sin\beta/|OA|\sin(-\gamma)$$

olduğundan çarpım (-1) olur.

(Çözenler: *Ülkü Öztaş***)**

A.147. *(Soru dergide eksik basılmış; doğrusu:)* Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninin $\hat{B}$ açısı dik olup, $[BD]$ köşegenine A ve C 'den indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E ve F ise, $|BE| = |DF|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $F\hat{D}C = \beta$ olsun. $|DC|\cos\beta = |DF|$, $B\hat{A}C = \beta$ olacağından,

$$|AB|/|AC| = \cos\beta$$

ve dolayısıyla,

$$|DC|.|AB|/|AC| = |DF|$$