14.BALKAN MATEMATİK OLİMPİYADI SORU VE ÇÖZÜMLERİ

N. Ergun , N. Ural , T. Yegül
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü,
İSTANBUL

29 Nisan-5 Mayıs 1997 tarihleri arasında Yunanistan'ın Tesselya bölgesinde yer alan 15 bin nüfuslu Kalampaka kentinde yapılan 14.Balkan Matematik Olimpiyadına, dokuz Balkan ülkesinden toplam $9 \times 6 = 54$ öğrenci katıldı. Bulgaristan 4 altın, 2 gümüş (231 puan), Romanya 3 altın, 3 gümüş (226 puan) ve Yunanistan 1 gümüş, 5 bronz(163 puan) ile ilk üç sırayı paylaştılar. Türkiye 1 gümüş ve 2 bronz madalya alarak altıncı oldu; takımımız toplam 117 puan elde etti. Aşağıda, 1 Mayıs 1997 Perşembe günü Kalampaka lisesinde yapılan 4,5 saat süreli yarışmanın sorularını ve çözümlerini bulacaksınız.

Bilindiği gibi tüm yarışmacı ülkeler sınavdan aylar önce ev sahibi ülkeye dörder aday soru gönderdiler. Ev sahibi ülke Yunanistan'ın oluşturduğu Problem Seçme Komitesinin bu aday sorular arasından ön elemeyle belirlediği 12 soru içinden, bu kez, yarışmacı ülkelerin takım liderlerinden oluşan uluslararası jüri (sınavdan bir gün önce) yarışma sorularını belirler. Soruların daha önce yapılan ulusal ya da uluslararası matematik yarışmalarında sorulmamış olan bir güç, bir kolay ve iki orta düzeyde soru olmasına ve lise düzeyindeki kavramlara ilişkin olmasına özen gösterilir.

UYARI: Soruların hiçbirisi sıradan değildir! Çözümleri incelemeye geçmeden önce, okuyucunun kendisini sınamak amacıyla, soruları kendi başına çözmeye çalışmasını salık veririz. Burada verilenlerden daha farklı (ama elbette doğru ve sağlıklı) çözümler de bulabilirsiniz. Son bir bilgi daha: zorluk düzeyleri farklı olmasına karşılık soruların tümü eşit (10'ar) puandır. Her bir sorunun yanında parantez içinde, o soruyu öneren ülkenin adı yazılıdır. Kolay gelsin!

SORU 1: (Yugoslavya)

Bir dışbükey (konveks) $ABCD$ dörtgeninde bir O iç noktası

$$|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2 = 2.S(ABCD)$$

eşitliğini gerçeklesin; $S(ABCD)$ dörtgenin alanını göstermektedir. $ABCD$'nin O merkezli bir kare olduğunu gösteriniz.

SORU 2: (Yugoslavya)

S kümesi n elemanlı ($n \geq 2$); $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ise S 'nin verilen altkümeleri olsun. ($m \geq 2$). Eğer farklı herhangi $x, y \in S$ noktaları için ya $x \in A_i, y \notin A_i$ ya da $x \notin A_i, y \in A_i$ olacak şekilde bir A_i altkümesi varsa, $n \leq 2^m$ eşitsizliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

SORU 3: (Yunanistan)

C_1, C_2 ve Γ çemberlerini gözönüne alalım. C_1 ve C_2 çemberleri Γ çemberine sırasıyla B ve C noktalarında içten teğet, birbirlerine ise D noktasında dıştan teğet olsunlar. A noktası ise C_1 ve C_2 nin D den geçen ortak teğet doğrusunun Γ çemberi ile kesişim noktası olsun. Ayrıca K ve L noktaları AB ve AC nin sırasıyla C_1 ve C_2 çemberleri ile , M ve N ise BC 'nin C_1 ve C_2 çemberleriyle kesişim noktaları olsun. AD, KM ve LN doğrularının aynı bir P noktasından geçtiğini gösteriniz.

SORU 4: (Bulgaristan)

Her x ve y için

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

eşitliğini gerçekleyen bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1: Verilen dışbükey dörtgenin alanı S, elbette, OAB, OBC, OCD ve ODA üçgenlerinin alanlarının toplamıdır. Bu üçgenlerin O noktasındaki tepe açılarını sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 ile gösterirsek,

$$S = \frac{1}{2}|OA|.|OB|\sin\alpha_1 + \frac{1}{2}|OB|.|OC|\sin\alpha_2 +$$

$$\tfrac{1}{2}|OC|.|OD|\sin\alpha_3 + \tfrac{1}{2}|OD|.|OA|\sin\alpha_4$$

$$\leq \tfrac{1}{2}|OA||OB| + \tfrac{1}{2}|OB||OC| + \tfrac{1}{2}|OC||OD|$$
$$+\tfrac{1}{2}|OD||OA| \qquad (2ab \leq a^2+b^2 \text{ nedeniyle})$$
$$\leq \tfrac{1}{4}(2|OA|^2+2|OB|^2+2|OC|^2+2|OD|^2) = S$$

nedeniyle tüm ara adımlardaki $\leq$ işaretleri eşitlik haline gelir. Bu ise zorunlu olarak

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4 = 1,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 90^0,$$

$$|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$$

sonuçlarını verir, çünkü örneğin $\sin\alpha_1 < 1$ olsa,

$$\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\alpha_1 < \frac{1}{2}|OA||OB|$$

nedeniyle sonuçta $S < S$ bulunacaktı; aynı nedenden ötürü, örneğin $|OA| \neq |OB|$ olsa,

$$|OA||OB| < \frac{1}{2}(|OA|^2 + |OB|^2)$$

ve sonuçta yine $S < S$ çelişkisi elde edilecekti. Bitti!

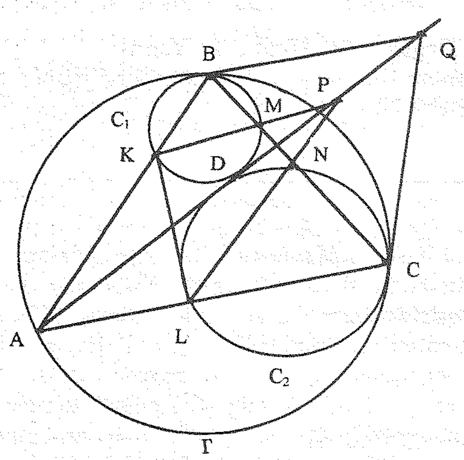
2: Önce bir gözlem yapalım: $A_1, A_2, \cdots, A_m$ kümelerinin S 'nin altkümeleri olmaları gerekmez. S ve A_i altkümelerinin bir X kümesinin, verilen "nokta ayırma" koşullarını gerçekleyen (ve elbette $S \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ kapsamasının gerçeklendiğini gözleyiniz) altkümeleri olmaları yeterlidir, üstelik bazı A_k kümeleri boş bile olabilir! Şimdi, karakteristik fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan

$$f(x) = (\chi_{A_1}(x), \chi_{A_2}(x), \cdots, \chi_{A_m}(x)) \quad (x \in S),$$

$$f : S \to \{0,1\}^m$$

fonksiyonunun birebir olduğunu kolayca gözleyebiliriz, çünkü $x \neq y$ iken, varsayım nedeniyle, $x \in A_i$, $y \notin A_i$ ya da $x \notin A_i$, $y \in A_i$ koşullarını gerçekleyen bir A_i altkümesi var olduğundan, $f(x)$ ve $f(y)$ sıralı m-lilerinin i-inci bileşenleri farklı ve dolayısıyla $f(x) \neq f(y)$ olmaktadır. O halde $n = |S| \leq |\{0,1\}^m| = 2^m$ bulunur.

3: Büyük bir Γ çemberinin içinde yer alan ve birbirlerine D noktasında, Γ çemberine ise sırasıyla B ve C noktalarında teğet olan C_1 ve C_2 çemberlerini çizelim.



Γ çemberinin B ve C noktalarındaki teğetlerinin kesişim noktası Q olsun. Γ çemberinde aynı yayı gören $\angle QBC$ ve $\angle QCB$ teğet-kiriş açıları için

$$m(\angle QBC) = m(\angle QCB) \qquad (1)$$

ve benzer biçimde C_1 çemberinde $\angle BKM$ çevre açısı ile aynı yayı gören $\angle QBM$ teğet-kiriş açısı için

$$m(\angle BKM) = m(\angle QBM) \qquad (2)$$

ve C_2 çemberinde $\angle CLN$ çevre açısı ile aynı yayı gören $\angle QCN$ teğet-kiriş açısı için

$$m(\angle CLN) = m(\angle QCN) \qquad (3)$$

geçerlidir. B, M, N ve C noktaları aynı doğru üzerinde olduklarından bu son üç sonuçtan

$$m(\angle BKM) = m(\angle QBM) = m(\angle QBC)$$
$$= m(\angle QCB) = m(\angle QCN) = m(\angle CLN)$$

bulunur. C_1 ve C_2 çemberlerinin ortak teğet doğrusu üzerinde bulunan A noktası için $|AK|.|AB| = |AD|^2 = |AL|.|AC|$ olur. A köşesindeki açıları ortak olan ALK ve ABC üçgenleri için

$$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|AL|}{|AB|}$$

olduğundan, bu iki üçgen benzerdir. Böylelikle

$$m(\angle AKL) = m(\angle ACB),$$

$$m(\angle ALK) = m(\angle ABC)$$

olur. Şimdi P köşesindeki açıları ortak olan PMN ve PLK üçgenlerini gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} m(\angle PMN) &= m(\angle BMK) \\ &= 180^0 - (m(\angle BKM) + m(\angle KBM)) \\ &= 180^0 - (m(\angle BKM) + m(\angle ABC)) \\ &= 180^0 - (m(\angle CLN) + m(\angle ALK)) \\ &= m(\angle PLK) \end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\begin{aligned} m(\angle PNM) &= m(\angle CNL) \\ &= 180^0 - (m(\angle CLN) + m(\angle LCN)) \\ &= 180^0 - (m(\angle CLN) + m(\angle ACB)) \\ &= 180^0 - (m(\angle BKM) + m(\angle AKL)) \\ &= m(\angle PKL) \end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle benzer oldukları anlaşılan PMN ve PLK üçgenleri için geçerli olan

$$\frac{|PM|}{|PL|} = \frac{|PN|}{|PK|}$$

eşitliği bize istenen sonucu verecektir.

4: Verilen fonksiyonel eşitlik koşulu

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

bize, kolayca, x yerine sıfır ve y yerine x yazarak

$$f(f(x)) = f^2(0) + x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

eşitliğini verir. (UYARI: O halde, $f(x) = f(y)$ bize $x = y$ verir, yani f birebirdir; üstelik $ff(x)$ birinci dereceden bir polinom ve sonuçta f fonksiyonu örtendir. Oysa f fonksiyonunun birebir ve örtenlik özellikleri aşağıda kullanılmayacaktır.)

Şimdi $a = f(-f^2(0))$ özel gerçel sayısını tanımlayalım. Dikkat edilirse,

$$f(a) = ff(-f^2(0)) \overset{(2)}{=} f^2(0) + (-f^2(0)) = 0$$

ve dolayısıyla (1) nedeniyle

$$\begin{aligned} 0 = f^2(a) &= f(a.f(a) + f(x)) - x = ff(x) - x \\ &= f^2(0) \end{aligned}$$

ve sonuçta $f(0) = 0$ bulunur. O halde (1) ve (2) kullanılarak

$$ff(x) = x, f(x.f(x)) = f^2(x) \; (x \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

ve bu son sonuçlar yardımıyla

$$\begin{aligned} x^2 = f^2(f(x)) &= f(f(x).ff(x)) = f(x.f(x)) \\ &= f^2(x) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla $f(x) = \mp x$ bulunur. Aman dikkat, aranan tüm f fonksiyonlarının

ya $f(x) = x$, (her $x \in \mathbb{R}$ için)

ya da $f(x) = -x$ (her $x \in \mathbb{R}$ için) (4)

şeklinde yalnızca iki tane olduğunu henüz kanıtlamadık. Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $f(x_0) = x_0$ olduğunda $f(y_0) = -y_0$'ı gerçekleyen $y_0 \neq 0$ gerçel sayısı var olamaz; olsaydı,

$$\begin{aligned} \mp(x_0^2 - y_0) &= f(x_0^2 - y_0) = f(x_0 f(x_0) + f(y_0)) \\ &= f^2(x_0) + y_0 = x_0^2 + y_0 \end{aligned}$$

çelişkisi bulunurdu. Demek ki tüm çözümler (4) 'de yazılanlardır.

DUYURU

Akdeniz Üniversitesi Matematik kulübü tarafından düzenlenen Antalya Matematik Olimpiyatlarından üçüncüsünün birinci aşama sınavı 7 Mart 1998, ikinci aşama sınavı 18 Nisan 1998 günü Akdeniz Üniversitesi Kampüsü, Merkezi Dersliklerde yapılacaktır. Olimpiyada Lise1, 2 ve 3 üncü sınıf öğrencileri katılabilmektedir. Olimpiyatta dereceye gireceklere Akdeniz Üniversitesi Rektörlüğü ve Antalya Eğitim Vakfı çeşitli ödüller verecektir.