ODTÜ MATEMATİK TOPLULUĞU 2.LİSELERARASI MATEMATİK YARIŞMASI

Mustafa Kalafat
ODTÜ, Matematik Bölümü, 06531-ANKARA

Ortadoğu Teknik Üniversitesi Matematik Topluluğunun düzenlemiş olduğu 2.Liselerarası Matematik Yarışması 24-26 Mayıs 1997 tarihlerinde yapıldı. 217 okul arasından seçilmiş olan, 23 takımın yarıştığı yarı finalden finale kalan okullar ve sıralamaları şöyledir:

1. Ankara Özel Arı Fen Lisesi.
2. Ankara Özel Samanyolu Fen Lisesi.
3. İzmir Özel Yamanlar Fen Lisesi.
4. İzmir Fen Lisesi.
5. Adana Kurttepe Anadolu Lisesi.

Soru grubu olarak bizden, yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Zafer Nurlu ve Prof. Dr. Albert Erkip 'e, jüri üyesi olarak katılan Prof. Dr. Okay Çelebi 'ye, topluluk başkanımız Selçuk Eren'e, soru grubundaki diğer arkadaşlarım Bilal Yurdakul ve Buğra Özer 'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Şimdi sizi yarıfinal sınavından seçtiğimiz sorularla başbaşa bırakıyoruz:

SORU 10: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r > 0, \theta \in \mathbf{R}$ sayısının n-inci ($n \in \mathbf{Z}^+$) dereceden köklerine kompleks düzlemde karşılık gelen noktaları köşe kabul eden konveks çokgenin alanına A_n diyelim.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{A_n}{\pi})^n = ?$$

ÇÖZÜM: Bir sayının n-inci ($n \geq 3$) dereceden kökleri, kompleks düzlemde köşelerinin orijine uzaklığı $\sqrt[n]{r}$ olan düzgün bir n-gen belirtir. n 'yi artırdığımızda bu n-genler limit halinde yarıçapı $\sqrt[n]{r}$ olan bir daireye yaklaşır:

$A_n \to \pi.(\sqrt[n]{r})^2$ olur.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{A_n}{\pi})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{\pi r^{2/n}}{\pi})^n = r^2$$

elde edilir.

SORU 15: Düzlemde, herhangi bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin köşelerinin koordinatları veriliyor. Daha sonra koordinatları verilen bir P noktasının $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin içinde, sınırlarında (üzerinde) veya dışında olduğu nasıl tespit edilebilir?

NOT: Bu soruyu, "bakalım nasıl testler çıkacak, ilginç yöntemler çıksın da biz de öğrenelim" düşüncesiyle, öğrencileri denemek amacıyla sormuştuk. Farklı olarak iki test ortaya atıldı:

ÇÖZÜM 1: Önce

$$A = A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1/2 \\ x_2 & y_2 & 1/2 \\ x_3 & y_3 & 1/2 \end{vmatrix}$$

determinantıyla bulunabilir. Sonra $T = A(P\overset{\triangle}{AB}) + A(P\overset{\triangle}{BC}) + A(P\overset{\triangle}{AC})$ toplamı bulunur.

A ve T 'nin karşılaştırması yapılır: $T > A$ ise nokta üçgenin dışındadır. $T = A$ olup olmadığına bakılır.

(a) T toplamını oluşturan üçgenlerden birinin alanı 0 ise nokta sınırdadır.

(b) Aksi durumda nokta üçgenin iç bölgesindedir.

ÇÖZÜM 2: AB doğrusunun $ax + by + c = 0$, kapalı şekilde denklemi bulunur. $ax + by + c$ ifadesine üçgenin diğer köşesi olan C noktası ile P noktası konularak aynı, tarafta olup olmadıklarına bakılır. İfade her ikisi için de aynı işaretli çıkıyorsa doğrunun aynı tarafındadırlar. Bu, her kenar için sağlanıyorsa nokta üçgenin iç bölgesindedir. Herhangi birisinde ters işaretlilik sözkonusuysa nokta üçgenin dışındadır. Eğer P noktası herhangi bir kenarda ifadeyi "0" yapıyorsa o zaman kenarın üstündeki doğru üzerinde demektir. Diğer kenarlar için yapılan testlere göre, kenarın aynı zamanda üçgenin dışında veya üzerinde olduğu belirlenir.

SORU 17: $x^2 = 2py, p \in \mathbb{R}^*$ eğrisi ile $d : x-k = 0,\ k \in \mathbb{R}$ doğrusunun kesişim noktasındaki eğri teğetine t diyelim. k değişirken , d 'nin t 'ye göre simetriği olan doğruların ortak özelliği nedir?

ÇÖZÜM 1: Probleme fiziksel açıdan yaklaşırsak, parabolik aynalarda ($x^2 = 2py$), asal eksene (y-ekseni) paralel gelen ışınlar ($x = k$) , odaktan ($F(0, \frac{p}{2})$) geçerler. Fizikçilere güvenerek bu yaklaşımı kabul edebiliriz.

ÇÖZÜM 2: Veya güvenmeyiz, bir matematikçi olarak ispatlarız:

$$y = \frac{x^2}{2p} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{(k,\frac{k^2}{2p})} = \frac{k}{p}$$

$$= m_t \text{ (teğetin eğimi)}.$$

$k = 0$ için $m_t = 0$ ve aranan doğru $x = 0$ doğrusu olur.

$k \neq 0$ için $m_t \neq 0$ ve simetrik doğrunun eğimi şöyle bulunur:

$$m_s = \frac{m_t - \frac{1}{m_t}}{1 + m_t.\frac{1}{m_t}} = \frac{m_t^2 - 1}{2m_t}$$

$$= \frac{(\frac{k}{p})^2 - 1}{2\frac{k}{p}} = \frac{k^2 - p^2}{2kp}.$$

Böylece, simetrik doğru $P(k, \frac{k^2}{2p})$ noktasından geçeceğinden, doğrunun denklemi

$$\frac{k^2 - p^2}{2kp} = \frac{y - \frac{k^2}{2p}}{x - k},$$

$$x(\frac{k^2 - p^2}{k}) + p^2 = 2py$$

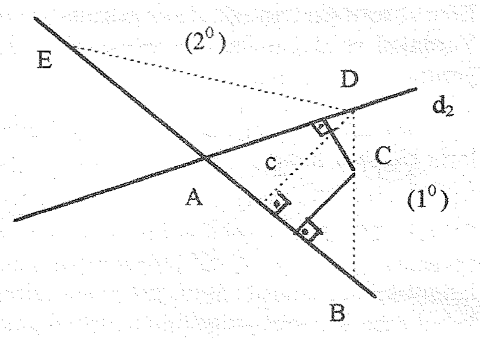
olarak elde edilir. $x_0 = 0$ için doğru denklemi k 'dan bağımsız yapılabilir, o zaman $y_0 = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2}$ olur. Bu da parabolün odağının ordinatıdır.

SORU 18: Kesişen iki düzleme olan uzaklıkları toplamı sabit bir $c \in \mathbb{R}^+$ sayısı olan noktaların geometrik yeri nedir?

ÇÖZÜM: Düzlemlere olan uzaklık, dik uzaklık demektir. Öyleyse bu iki düzleme dik bir düzlemdeki arakesitte durumu inceleyelim.

(1^0) bölgesinde incelediğimizde, aradığımız parçanın, eşitkenarları d_1 ve d_2 üzerinde, eş yükseklikleri c birim olan bir ikizkenar üçgenin tabanı olduğu görülür. Çünkü, ikizkenar üçgende, tabandaki herhangi bir noktanın ikizkenarlara olan uzaklıkları toplamı sabittir ve eş yüksekliğin uzunluğu kadardır.

(2^0) bölgesine bakıldığında yine aynı durum sözkonusudur. Yeni üçgen ile öncekinin birer kenarı ortaktır. Çünkü her ikisi de aynı eş iki yükseklik olan c yüksekliğindedirler. 4 bölge birlikte düşünüldüğünde ortaya bir paralelkenar çıkar. Dikkat edilirse, bu hiç de sıradan bir paralelkenar değildir. $|AB| = |AD| = |AE|$ gereğince bu bir dikdörtgendir.



Bu iki düzlemi, ikisine de dik hangi düzlemle kesersek keselim, aranan yerin bir dikdörtgen olduğunu görürüz. Bu dikdörtgenleri de üst üste koyarsak, ortaya tabanı dikdörtgen olan silindirik yüzey çıkar. Yüksekliği sonsuz olan bir dikdörtgenler prizması şeklinde de tanımlanabilir.