BAZI FONKSİYONEL DENKLEMLERİN ANALİZ YÖNTEMLERİYLE ÇÖZÜLMESİ

Nizamettin İskenderov

Matematiğin, mekaniğin ve fiziğin bir çok çeşitli problemleri fonksiyonel denklemlere indirgenir. Bu denklemlerdeki bilinmeyenler fonksiyonlar olur. Örneğin,

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$x, y \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty),$$

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = x + y + z,$$
$$x, y, z \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Fonksiyonel denklemin çözümü, onun hangi sınıfta aranmasına bağlıdır. $f(3x) = 3f(x)$ denkleminin çözümü differansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfında $f(x) = ax$ ($a \in \mathbf{R}$) şeklindedir. $f(x)$ fonksiyonu $\frac{1}{3} < x < \sqrt{3}$ aralığında tanımlanmışsa ve differansiyellenebilir ise, o zaman kolayca görülür ki, $f(x) = x\tan(\pi log_3 x)$ fonksiyonu da, (1) denklemini sağlar. Yani $f(x)$ fonksiyonunun tanım sınıfını küçülttüğümüzde iki farklı çözüm ortaya çıkar.

1. Önce sürekli fonksiyonlar sınıfında, limite geçmenin yardımı ile bir kaç denklem çözelim.

Örnek 1. $$f(x) = \tfrac{1}{3} f(\tfrac{x}{2}) + x \qquad (1)$$

denklemini sürekli fonksiyonlar sınıfında çözünüz. Burada $x \in \mathbf{R}$ dir.

Çözüm. (1) denkleminde x'in yerine $\frac{x}{2}$ yazar ve $\frac{1}{3}$'le çarparsak,

$$\tfrac{1}{3} f(\tfrac{x}{2}) = \tfrac{1}{9} f(\tfrac{x}{4}) + \tfrac{x}{2.3} \qquad (2\text{-}1)$$

elde ederiz. Aynı dönüşümü $(2-1)$'de yerine yazarsak ve her iki tarafı $\frac{1}{3}$'le çarparsak

$$\tfrac{1}{9} f(\tfrac{x}{4}) = \tfrac{1}{27} f(\tfrac{x}{8}) + \tfrac{x}{4.9}\ , \qquad (2\text{-}2)$$

$$\tfrac{1}{27} f(\tfrac{x}{8}) = \tfrac{1}{81} f(\tfrac{x}{16}) + \tfrac{x}{8.27}\ , \qquad (2\text{-}3)$$

$$\cdots$$

olur. Tümevarım yöntemiyle, $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ için

$$\tfrac{1}{3^k} f(\tfrac{x}{2^k}) = \tfrac{1}{3^{k+1}} f(\tfrac{x}{2^{k+1}}) + \tfrac{x}{2^k.3^k}\ , \qquad (2\text{-}k)$$

olduğunu kolayca göstermek olanaklıdır. Bu eşitliğin sağ ve sol tarafını $k = 0$ dan n 'ye kadar toplarsak,

$$f(x) = \frac{1}{3^{n+1}} f(\frac{x}{2^{n+1}}) + x(1 + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{6^n})$$

$$= \tfrac{1}{3^{n+1}} f(\tfrac{x}{2^{n+1}}) + \tfrac{6x}{5}(1 - \tfrac{1}{6^n}) \qquad (3)$$

olur. $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, keyfi sabit alınmış x için,

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{x}{2^{n+1}}) = f(0)$$

dır. (1) denkleminde $x = 0$ yazarsak, $f(0) = \frac{1}{3}.f(0)$ veya $f(0) = 0$ elde ederiz. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} f(\frac{x}{2^{n+1}}) = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^n} = 0$$

olduğundan, (3) eşitliğinden

$$f(x) = \frac{6}{5}x$$

olur. Kolayca gösterebiliriz ki, bulduğumuz $f(x) = \frac{6}{5}x$ fonksiyonu (1) denklemini sağlar.

Örnek 2. Negatif olmayan sayılar kümesinde tanımlanmış ve

$$f(x^3) + f(x) = x^3 + x$$

denklemini sağlayan tüm sürekli fonksiyonları bulunuz.

Çözüm. $h(x) = f(x) - x$ dersek,

$$h(x^3) = -h(x) \qquad (4)$$

olur. (4) denkleminde n defa $x \to \sqrt[3]{x}$ dönüşümünü yaparsak,

$$h(x) = -h(\sqrt[3]{x}) \, ,$$
$$-h(\sqrt[3]{x}) = h(\sqrt[9]{x}) \, ,$$
$$\ldots$$
$$(-1)^{n-1}h(\sqrt[3^{n-1}]{x}) = (-1)^n h(\sqrt[3^n]{x})$$

elde ederiz. Bunları taraf tarafa toplarsak,

$$h(x) = (-1)^n h(\sqrt[3^n]{x}) \tag{5}$$

ve (5) 'ten

$$\begin{aligned} h(x) &= (-1)^n(-1)^n h(\sqrt[3^{2n}]{x}) \\ &= h(\sqrt[3^{2n}]{x}) \end{aligned} \tag{6}$$

olur. Keyfi $x \in \mathbf{R}^+$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3^{2n}]{x} = 1$$

olduğundan (6) 'dan $h(x) = h(1)$ elde edilir. (4) 'ten ise $h(1) = -h(1)$ ve dolayısıyla, $h(1) = 0$ olur. Böylece, $h(x) = 0$, $f(x) = x + h(x) = x$ olur.

2. Şimdi ise, sürekli türevi olan fonksiyonlar sınıfında bazı fonksiyonel denklemlerin çözüm yöntemlerini öğrenmeye çalışalım.

Örnek 3. Varsayalım ki, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 'dir ve her $x \in \mathbf{R}$ için sürekli türevi vardır.

$$f(3x) = 3f(x) \tag{7}$$

denkleminin çözümünün $f(x) = ax$ şeklinde olduğunu gösteriniz. (Burada $a \in \mathbf{R}$ keyfi sabittir).

Çözüm. (7) denkleminin her iki tarafının türevini alırsak, $3f'(3x) = 3f'(x)$ olur. Buradan

$$f'(3x) = f'(x) \tag{8}$$

elde edilir. Bu denklem için limite geçme yöntemini uygulayalım. $x \to \frac{x}{3}$ dönüşümünü (8)'de yerine yazarsak,

$$f'(x) = f'(\frac{x}{3}) = f'(\frac{x}{3^2}) = \cdots = f'(\frac{x}{3^n})$$

olur. $f'(x)$ sürekli olduğundan, sonuncu eşitlikte limite geçersek, $f'(x) = f'(0)$ olur. Böylece, $f'(x) = a$, $(a = f'(0))$ elde edilir. Buradan $f(x) = ax + b$ olur. (7) denkleminden $f(0) = 3f(0)$ veya $f(0) = 0$ olduğundan $b = f(0) = 0$ dır. Yani, $f(x) = ax$, $(a = f'(0))$ şeklindedir.

Kolayca görülür ki, $f(x) = ax$ fonksiyonu keyfi $a \in \mathbf{R}$ için (7) denklemini sağlar.

Bazı durumlarda, fonksiyonel denklemi çözerken onun bir kaç defa türevini almak gerekebilir.

Örnek 4. İkinci türevi sürekli olan fonksiyonlar sınıfında

$$f(kx + b) = k^2 f(x) \, , \; (k \neq 0, 1 \, ; \; x \in \mathbf{R}) \tag{9}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. (9)'un her iki tarafının iki defa türevini alalım. O zaman,

$$f'(kx + b) = kf'(x), f''(kx + b) = f''(x) \tag{10}$$

olur.

Önce varsayalım ki, $|k| > 1$ dir. n defa ardışık olarak $x \to \frac{x-b}{k}$ dönüşümünü yaparsak, (10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(\frac{x-b}{k}) = f''(\frac{x-b}{k^2}) = \cdots = \\ &= f''(\frac{x-b}{k^n}) \end{aligned}$$

elde ederiz. $n \to \infty$ için $f''(x) = f''(0)$ olur.

$0 < |k| < 1$ olduğunda ise, (10)'da $x \to kx + b$ dönüşümünü yazarsak,

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''[k(kx + b) + b] \\ &= f''(k^2x + kb + b) \\ &= f''(k^3x + k^2b + kb + b. \\ &= \cdots = f''[k^n x + (k^{n-1} \\ &+ \cdots + k + 1)b] \\ &= f''(k^n x + \frac{1-k^n}{1-k}b) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$n \to \infty$ için, $0 < |k| < 1$ olduğundan, $f''(x) = f''(\frac{b}{1-k})$ olur. $c = f''(0)$ (veya $c = f''(\frac{b}{1-k})$) dersek her iki halde de $f''(x) = c$ denklemini elde ederiz. Buradan

$$f'(x) = cx + d \tag{11}$$

olur. (9) ve $f'(kx + b) = kf'(x)$ denklemlerinde $x = \frac{b}{1-k}$ yazarsak,

$$f(\frac{b}{1-k}) = k^2 f(\frac{b}{1-k}) \, , \; f'(\frac{b}{1-k}) = kf'(\frac{b}{1-k})$$

ve dolayısıyla, $f(\frac{b}{1-k}) = 0$, $f'(\frac{b}{1-k}) = 0$ elde ederiz. (11)'den $c.\frac{b}{1-k} + d = 0$, $d = c.\frac{b}{k-1}$ olur. Bunu (11)'de gözönüne alırsak,

$$f'(x) = c(x + \frac{b}{k-1});$$

buradan ise

$$f(x) = \frac{c}{2}(x + \frac{b}{k-1})^2 + l$$

olur. $f(\frac{b}{1-k}) = 0$ olduğundan, sonuçta

$$f(x) = a(x + \frac{b}{k-1})^2$$

buluruz. Burada $a \in \mathbb{R}$ keyfi sabittir.

Çoğu zaman türevin tanımını kullanarak, fonksiyonel denklemleri çözümlemek olanaklıdır.

Örnek 5. $(0, \infty)$ aralığında tanımlanmış, türevi olan ve

$$f(xy) = f(x).f(y)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonları bulunuz.

Çözüm. Kolayca görünür ki, $f(x) = 0$ fonksiyonu (12) denkleminin çözümlerinden biridir. Denklemin sıfırdan farklı çözümünü bulmaya çalışalım. Varsayalım ki, $f(x)$ fonksiyonu (12) denklemini sağlıyor ve bir a için $f(a) \neq 0$ olsun. O zaman (12) 'den $y = \frac{a}{x}$ için

$$f(x).f(\frac{a}{x}) = f(x\frac{a}{x}) = f(a) \neq 0$$

olur. Yani, bu durumda her $x > 0$ için $f(x) \neq 0$ dır.

$$f(x) \;=\; f(\sqrt{x}.\sqrt{x}) = f(\sqrt{x}).f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2$$

olduğundan dolayı $f(x) > 0$ dır.

Koşulumuza göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

türevi her $x > 0$ için vardır. (12)'den

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f[x(1+\frac{h}{x})] - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(1+\frac{h}{x}) - f(x)}{h} \\ &= \frac{f(x)}{x}.\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x}) - 1}{\frac{h}{x}} \end{aligned}$$

olur. $h \to 0$ olduğunda $\frac{h}{x} \to 0$ dır. $f(1) = 1$ olduğundan

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x}) - f(1)}{\frac{h}{x}} = f'(1) = c$$

sonludur. Sonuçta

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}.c \text{ veya } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{c}{x}$$

elde edilir. Buradan ise,

$$lnf(x) = c\ln x + b$$

olur. Bu denklemde $x = 1$ alırsak, $f(1) = 1$ olduğundan $b = 0$ bulunur. Böylece, (12) denkleminin çözümü $f(x) = 0$ ya da $f(x) = x^c$ olur. Burada $c \in \mathbb{R}$ keyfi sabittir.

EK PROBLEMLER:

1. Sürekli fonksiyonlar sınıfında aşağıdaki denklemleri çözünüz:

(a) $f(x) = f(\frac{x}{5})2^x$,

(Yanıt: $f(x) = k2^{\frac{5x}{4}}$, $k \in \mathbb{R}$)

(b) $f(2x+1) = f(x)$.

(Yanıt: $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$)

2. Türevlenebilen fonksiyonlar sınıfında aşağıdaki denklemleri çözünüz:

(a) $f(f(x)) = f(x) + x$,

(Yanıt: $f(x) = \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}x$)

(b) $f(xy) = f(x) + f(y)$,

$(x, y \in \mathbb{R}^+)$

(Yanıt: $f(x) = clnx$, $c \in \mathbb{R}$)

KAYNAKÇA

[1] Brodskiy Y. S, Slipenko. A. K., Fonksiyonel Denklemler, Kiev, Vişa Şkola, 1983.