mum oluyor.

t_1 değerini kirişin uzunluğunu gösteren $d^2 = f(t)$ ifadesinde yerine koyarsak

$$d_{t_1}^2 = \frac{4b^2\left[(b^2-a^2)\frac{(2b^2-a^2)a^4}{b^4-a^4}+a^4\right]^3}{\left[(b^4-a^4)\frac{(2b^2-a^2)a^4}{b^4-a^4}+a^6\right]^2}$$

$$= \frac{4b^2\left[\frac{(2b^2-a^2)a^4}{b^2+a^2}+a^4\right]^3}{\left[(2b^2-a^2)a^4+a^6\right]^2}$$

$$= \frac{4b^2(2a^4b^2-a^6+a^4b^2+a^b)^3}{(2a^4b^2-a^6+a^6)^2} = \frac{27a^4b^4}{(b^2+a^2)^3}$$

Bu d_{t_1} uzunluğu $2a$ dan küçüktür. $b > \sqrt{2}a$ iken $d_{b_1} < 2a$ olduğu doğrudan da kolayca gösteri.ebilir $b = \sqrt{2}a$ ise $d_{t_1} = 2a$ olur. Bu durumda $x_1 = a$ olmuştur.

x_1 noktasının sağında ve solunda $d^2 =$ $f(t)$ fonksiyonu yükselen olduğu için $0 \le x \le a$ aralığının ucundaki değerleri hesaplarsak ara değerler daha düşük olacağı için göz önüne alınmalarına gerek yoktur. Böyle yapınca $d_0 = 2b, d_a = 2a$ buluruz. $2b > 2a$ olduğuna göre $d_{max} = 2b, d_{min} = \dfrac{\sqrt{27a^2b^2}}{(b^2+a^2)^{3/2}}$.

$a < b < \sqrt{2}a$ ise artık $f'(t)$'yi sıfır yapan bir değer yoktur. Demek ki $f(t)$, ya azalmakta, yada artmaktadır. O halde $0 \le x_0 \le a$ ara değerler arada kalacağından göz önüne alınmalarına gerek yoktur. Hesap sonucu yukardaki gibi $d_0 = 2b, d_a = 2a$ bulunur. O halde $d_{max} = 2b, d_{min} = 2a$.

Görülüyorki her iki halde de $d_{max} = 2b$ iken, $b > \sqrt{2}a$ ise $d_{min} = \dfrac{\sqrt{27a^2b^2}}{(b^2+a^2)^{3/2}}$,

$$a < b < \sqrt{2}a \quad \text{ise} \quad d_{min} = 2a$$

oluyor. Eğer $b = \sqrt{2}a$ ise iki durum çakışıyor, $d_{min} = 2a$ çıkıyor.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A146. Bir XY doğrusu köşeleri aynı olan üç dik açının kenarlarını sırasıyla A, B, C, D, E, F noktalarında kesiyorsa

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA} = -1$$

olduğunu gösteriniz. *(Cemil Uğurlu, 1946).*

A147. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninin $[BD]$ köşegenine A ve C den indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E ve F ise $|BE| = |DF|$ olduğunu ispatlayınız.

A148. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerine DBC ve EBC eşkenar üçgenleri kuruluyor. $|AD|^2 + |AE|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ olduğunu ispatlayınız. ($a, b, c ABC$ üçgeninin kenar uzunluklarıdır.)

A149. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ eğrisi bir elips ise, içindeki bölgenin alanını A, B, C cinsinden hesaplayınız. *(Turgay Kaptanoğlu)*

A150. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsiyle $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ hiperbolünün, eğer $A^2 \le a^2$ ve $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ ise (yani eşodaklı iseler) dik olarak kesiştiklerini gösterin. *(Turgay Kaptanoğlu)*

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y146. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı çap alınarak üçgenin dışına bir yarım çember çiziliyor. Bu çember yayının orta noktası D olmak üzere D den öyle bir doğru geçiriniz ki, yarım çember ve üçgenden oluşan konveks bölge alanca eşit iki bölgeye ayrılsın.

Y147. Dar açılı bir ABC üçgeninde yükseklik ayakları D, E, F olmak üzere DEF üçgeninin çevresi v, ABC üçgeninin çevresi $2u$ ise $u \ge v$ olduğunu ispatlayınız.

Y148. Bir çember üzerinde ardışık A, B, C, D noktaları alınarak ADC ve DCB açılarının açıortayları çiziliyor. Bu açıortayların kesiştiği K noktasından AB na çizilen paralel, doğru $[AD]$ ve $[BC]$ kenarını sırasıyla E ve F noktalarında kesiyor. $|EF| = |ED| + |FC|$ olduğunu ispatlayınız.

Y149. $\sqrt{2}(xy + yz) \leq x^2 + y^2 + z^2$ eşitsizliğinin her x, y, z gerçel sayısı için doğru olduğunu gösteriniz.

Y150. Her n pozitif tam sayısı için $a_n = x^n + x^{-n}$ bir tam sayı ise, x reel sayısı hangi değerleri alabilir?

ÇÖZÜMLER

A136. Bir torbada başlangıçta a tanesi kırmızı, b tanesi beyaz ve c tanesi de siyah olmak üzere toplam 20 top bulunmaktadır.

(i) Beyaz topların sayısı iki katına çıkarıldıktan sonra torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığının, başlangıçtaki torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığından $\frac{1}{25}$ daha az olduğu ve

(ii) torbadaki bütün kırmızı toplar çıkartılıp geri kalanlar arasında rastgele bir top çekildiğinde bu topun beyaz olması olasılığının, aynı çekilişin başlangıçtaki torbadan yapıldığı durumdakinden $\frac{1}{16}$ daha fazla olduğu bilinmektedir. a, b ve c yi bulunuz. (*I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından*)

Çözüm. Verilen koşullardan $\frac{a}{20+b} = \frac{a}{20} - \frac{1}{25}$ ve $\frac{b}{20-a} = \frac{b}{20} + \frac{1}{16}$ bulunur. Sadeleştirirsek $(5a-4)b = 80$ ve $(4b+5)a = 100$ elde ederiz. a ve b pozitif tam sayılar olduğundan çarpanları deneyerek $a = 4, b = 5$ ve dolayısıyla $c = 11$ çıkar.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Cemal Özboğa, Naim Uygun, Recep Ülgen.*)

A137. Yalnızca 1,6 ve 9 rakamları kullanılarak yazılan pozitif tam sayıları

$$1, 6, 9, 11, 16, \cdots$$

diye küçükten büyüğe doğru dizelim.

a) 1996 nın bu dizinin kaçıncı terimi olduğunu bulunuz.

b) Bu dizinin 1996 ıncı terimini bulunuz.

(*I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından*)

Çözüm. Dizide bir basamaklı terimler 1,6 ve 9 iki basamaklılar $11, 16, \cdots, 99$ dur. Üç basamaklılar iki basamaklıların başına sırayla 1, 6 ve 9 eklenerek bulunur. Buradan 1 basamaklı 3, 2 basamaklı $3^2 = 9, \cdots, n$ basamaklı 3^n terim olduğu görülür. 1999 sayısı 4 basamaklı terimlerden 1 ile başlayanların sonuncusudur; O halde $3 + 9 + 27 + 27 = 66$'ıncı terimdir. O halde 1996, 65'inci terim olur. Dizide 6 veya daha az basamaklı $3 + 9 + 27 + \cdots + 3^6 = 1092$ terim, 7 veya daha az basamaklı $1092 + 3^7 = 3297$ terim olduğundan 1996'ıncı terim 7 basamaklıdır. $1996 - 1092 = 904$, $3^6 = 729$, $2 \cdot 3^6 = 1458$ olduğundan aradığımız terimin 7'inci basamağı 6'dır. $904 - 729 = 175$, $3^5 = 243$ olduğundan 6'ıncı basamak 1 dir; $34 = 81$, $2 \cdot 3^4 = 162$ olduğundan 5'inci basamak 9 dur; $175 - 162 = 13$, $3^3 = 27$, den 4'üncü basamak 1; $3^2 = 9, 2 \cdot 3^2 = 18$ den 3'üncü basamak 6, $13 - 9 = 4$ ve $2 \cdot 3$ den 2'inci basamak 6, $4 - 3 = 1$ den son basamak bulunur. Yani 1996'ıncı terim 619166 dır.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Cemal Özboğa.*)

A138. $ABCDE$ düzgün beşgeninin içindeki bir F noktası için $m(\widehat{FDC}) = 66°$, $m(\widehat{FBC}) = 60°$ ise AFE açısı kaç derecedir?

Çözüm. $ABCDE$ düzgün beşgeni çizilip içinde $m(\widehat{FDC}) = 66°$ ve $m(\widehat{FBC}) = 60°$ alındığında, BFD üçgeninde sinüs teoreminden, $|BD| = 2|BF|\sin 54°$ bulunur. $|BD| = 2|BC|\sin 54°$ olduğundan $|BF| = |BC|$ elde edilri. $|BF| = |BC|$ den $m(\widehat{BFC}) = m(\widehat{BCF}) = 60°$. Buradan $m(\widehat{FCD}) = 48°$ ve $m(\widehat{CFD}) = 66°, m(\widehat{AFE}) = 84°$ bulunur.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Kocaeli Körfen Fen Lisesi II-C Sınıfı, Cemal Özboğa.*)

A139. B açısı dik açı olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I, $[AI]$ ve $[CI]$ nın $[BC]$ ve $[AB]$ nı kestiği noktalar E ve D, E ve D den iç teğet çembere çizilen teğetlerin hipotenüsü kestiği noktalar K ve L ise $\tan(\widehat{KBL})$ kaçtır?

Çözüm. Probleme uygun şekil çizildiğinde, ABE üçgeni ile AKE üçgeninin ve DBC üçgeni ile DLC üçgeninin eş oldukları görülür. Buradan $m(\widehat{KLB}) = 45°$ ve $\tan(\widehat{KBL}) = 1$ elde edilir.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Cemal Özboğa.*)

A140. $ABCD$ konveks bir dörtgen, köşegenlerin kesişim noktası E, $\widehat{ADB} \cong \widehat{ACD}$ $\widehat{ADC} \cong \widehat{DAC}$ ve $\widehat{DBC} \cong \widehat{DCB}$ ise $\frac{EC}{EB} - \frac{EA}{ED}$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm. $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACD}) = \alpha$, $m(\widehat{ACB}) = \beta$ ise $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB}) = \alpha + \beta$ olur. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC}) = 180° - (\alpha + 2\beta)\alpha = m(\widehat{ACD}) = 180° - 2m(\widehat{DAC}) = 2\alpha + 4\beta - 180°$ ve $\alpha + 4\beta = 180°, m(\widehat{DAC}) = 2\beta, m(\widehat{DBC}) = \alpha + \beta = 180° - 3\beta$ bulunur.

Köşegenlerin kesiştiği nokta da E olmak üzere, EBC ve EAD üçgenlerinde sinüs teoreminden

$$\frac{|EC|}{|EB|} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = 4\cos^2\beta - 1$$

$$\frac{|EA|}{|ED|} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{\sin 4\beta}{\sin 2\beta} = 2\cos 2\beta = 4\cos^2\beta - 2,$$

$$\text{ve} \quad \frac{|EC|}{|EB|} - \frac{|EA|}{|ED|} = 1 \quad \text{elde edilir.}$$

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Recep Ülgen.*)

Y136. $x^2 - 4x - 2 = 0$ denkleminin köklerinin

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) = 2 + x.$$

denklemini de sağladığını göstererek ikinci denklemin tüm köklerini bulunuz.

Çözüm. $x^2 - 4x - 2 = 0$ ise $x^2 - 3x - 2 = x$ olur. İkinci denklemde yerine koyunca, yine $x^2 - 3x = 2 + x$ ten

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) = x^2 - 3x = x + 2$$

bulunur. Bu ise $p(x) = (x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - x - 2$ polinomunun $x^2 - 4x - 2$ ile bölündüğünü söyler. Bölmeden sonra

$$p(x) = (x^2 - 4x - 2)(x^2 - 2x - 4)$$

ve kökler $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{5}$ çıkar

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Atasağun Baykal, Kocaeli Körfez Fen Lisesi II-C sınıfı, Naim Uygun.*)

Y137. a, b, c gerçel sayıları için $8a + 4b + 2c = 0$ ise $ax^3 + bx^2 + c = 0$ denkleminin $[0, 2]$ aralığında en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $p(x) = ax^3 + bx^2 + c$ için $p(0) = c$, $p(2) = 8a + 4b + c$ dir. $8a + 4b + 2c = 0$ ise $p(0) + p(2) = 0$ dır. Buradan $p(0) = p(2) = 0$ veya $p(0)$ ve $p(2)$ nin sıfırdan farklı ve ters işaretli olduğu çıkar. $p(x)$ sürekli olduğundan ikinci durumda $(0, 2)$ aralığında en az bir kök vardır.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Atasağun Baykal, Cemal Özboğa, Recep Ülgen.*)

Y138. Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde $m(\widehat{APB}) = 150°$, $|AP| = 2\sqrt{3}$ cm ve $|BP| = 2$ cm olacak biçimde bir P noktası alınıyor $|PC|$ yi bulunuz. (*I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından*)

Çözüm. ABC eşkenar üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerine dışa doğru APB üçgenine eş AQC üçgenini kuralım. $m(\widehat{PAQ}) = 60°$ ve $|AP| = |AQ|$ olduğundan APQ üçgeni de (bir kenar uzunluğu $2\sqrt{3}$ olan) eşkenar üçgen olur. $m\widehat{PQC} = 90°$ elde edilir. (PQC) dik üçgeninde Pisagor bağıntısından $|PC| = 4$ elde edilir.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Kocaeli Körfen Fen Lisesi II-C sınıfı, Cemal Özboğa, Naim uygun, Recep Ülgen.*)

Y139. Herhangi bir ABC üçgeninin iç bölgesinde, $\widehat{DAB} \cong \widehat{DBC} \cong \widehat{DCA}$ olacak biçimde birtek D noktasının bulunduğunu ispatlayınız. $\cot(\widehat{DAB})$ nin bu üçgenin alanı ve kenarları cinsinden değerini bulunuz.

Çözüm. $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCA}) = \alpha$ olsun. (ABD) çemberini gözönüne alalım. $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DAB}$ olduğundan BC doğrusu bu çembere teğet olur. Dolayısıyla, $(ABD), (BDC)$ ve (CDA) çemberleri aynı noktadan geçer.

AB doğrusuna A noktasında teğet olup C den geçen, AC doğrusuna C noktasında teğet olup B den geçen ve BC doğrusuna teğet olup A dan geçen üç çember aynı bir noktadan geçer. Bu nokta tek olup üçgenin iç bölgesinde bulunur. Bu noktanın çizimle elde edilmesi: $AE//BC$ ve CE doğrusu (ABC) çemberine teğet ise $(ACE) \cong (ADC)$ olur. (CE) çemberi ile BE nin kesiştiği nokta D noktasıdır. $\widehat{ACE} = \widehat{ABC}$, $\widehat{EAC} = \widehat{BCA}$ ve $\widehat{CEA} = \widehat{CAB} = \widehat{CDA}$ oluduğundan D noktası (ACE) çemberinin üzerindedir. Tanımdan $\widehat{DBC} = \widehat{DCA} = \widehat{DEA}$ olup, B, D, E noktaları doğrusaldır.

A ve E nin BC üzerindeki izdüşümü sırasıyla H ve F olsun.

$$\cot\alpha = \frac{|BF|}{|EF|} = \frac{|BH|}{|EF|} + \frac{|HC|}{|EF|} + \frac{|CF|}{|EF|}$$

$$= \cot B + \cot C + \cot A$$

bulunur. Sinüs ve cosinüs teoremlerinden

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4A(ABC)}$$

bulunur.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Atasağun Baykal.*)

Y140. Bir ABC üçgeninin $[AB], [BC]$ ve $[CA]$ kenarları üzerinde sırasıyla $|DB| = 2|DA|$, $|EC| = 2|EB|$, $|FA| = 2|FC|$ eşitliklerini sağlayan D, E, F noktaları alınıyor. ADF, BED, CEF üçgenlerinin çevrel çemberleri eş ise bu üçgenlerin iç teğet çemberlerinin de eş olacağını ispatlayınız.

Çözüm. ABC üçgeninin AB, BC, CE kenarları üzerinde verilere uygun olarak D, E, F noktalarını alalım. ADF, BED, CEF üçgenlerinin alanları ve $(ADF), (BED), (CEF)$ çemberlerinin yarıçapları eşit olduğundan DEF ile CAB benzer üçgenler olup alanları oranı $\frac{1}{3}$ benzerlik oranı $\frac{1}{\sqrt{3}}$ tür. Bu nedenle $a = \sqrt{3}|DF|$, $b = \sqrt{3}|DE|$, $c = \sqrt{3}|EF|$ dir. ADF ve ABC üçgenlerinde A için cosinüs teoreminden $a^2 = 2b^2 - c^2$ bulunur. Benzer biçimde, $b^2 = 2c^2 - a^2, c^2 = 2a^2 - b^2$ elde edilir. Bu üç eşitlikten $a = b = c$ bulunur. Üçgenlerin eşliğinden iç yarıçaplarının eşliği elde edilir.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Atasağun Baykal, Cemal Özboğa.*)

MATEMATİK DÜNYASINDAN

Bu sayı ile altıncı cildimizi tamamlamış oluyoruz. Bu arada Türk Matematik Derneği ile birlikte 7 ayı bulan bu gecikmeyi nasıl telafi edebileceğimizi düşündük. Kaldığımız yerden devam etmek gecikmeyi 1997 ve daha sonrasına taşımak anlamına geliyordu, bu ise abone işlerinin aksamasına, okurlarımızın haklı olarak şikayetlerine neden olacaktı. Hepimizin arzusu ise *Matematik Dünyası*'nın zamanında ve düzenli olarak çıkabilmesi. Kısa bir soluk alıp yeniden başlamak bu durumda en anlamlı çözüm olarak görünüyor.

Matematik Dünyası'na bu sayıdan sonra kısa olacağını umduğumuz bir ara veriyoruz. Amacımız, bir süre sonra daha iyi bir şekilde okurlarımıza kavuşmak. Bu süreyi kısa tutarak 1998 Ocak sayısıyla tekrar yayına başlayabilmek için çalışmalarımız sürüyor.

Okurlarımızdan ricamız bizi anlayışla karşılamaları ve şimdiden abone ücreti yatırmamaları. *Matematik Dünyası*'nın tekrar çıkışını abonelerimize bildireceğiz, basından duyurmaya çalışacağız. Bu arada yazışmalarınız için ODTÜ Matematik Bölümü adresimizle telefon ve fax numaralarımız hala geçerli. Eski sayılarımızı buradan temin edebilirsiniz.

En kısa zamanda tekrar buluşmak üzere.

DİZİN (6. CİLT)