yazarak, $6B - 2A^2 \neq 0$ olmak üzere

$$4B^3 - A^2B^2 - 18ABC + 27C^2 + 4A^3C = 0$$

bulunur. O halde bu koşulu sağlayan *(I)* denkleminin iki kökü birbirine eşittir.
Örnek. $x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = 0$ denklemini düşünelim.

$$4 \cdot 21^3 - 8^2 \cdot 21^2 - 18 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 18 + 27 \cdot 18^2 + 4 \cdot 8^3 \cdot 18\ 37044 - 28224 - 3024 \cdot 18 + 8748 + 36864 = 0$$

koşulu sağladığından

$$x_3 = x_2 = \frac{BA - 9C}{6B - 2A^2} = \frac{21.8 - 9.18}{6.21 - 2.64} = \frac{168 - 162}{126 - 128} = \frac{6}{-2} = -3$$

buluruz. Buradan

$$x_1 = \frac{-8AB + 18C + 2A^3}{6B - 2A^2} = \frac{-8.8.21 + 18.18 + 2.8^3}{6.21 - 2.64} = -2$$

bulunur.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ KAVRAMININ GEOMETRİ VE ANALİZ PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Mehmet Hamidoğlu Tagiyev *

1. GİRİŞ

Matematik Dünyası'nın 1994 yılı 5 inci sayısında Geometri problemlerinin çözümünde kullanılan özel bir metodla tanıştık, [1]. Mekaniğin ağırlık merkezi kavramı ile bağlı olan ve M.Ö 3.yüzyılda Arşimet tarafından verilen bu metodun problem çözümünde kolaylıklar sağladığını o yazımızda gördük. Arşimetten çok daha sonra XVIII yüzyılda yaşamış büyük matematikçi L.Euler cisimlerin dönel hareketlerini araştırırken eylemsizlik momenti adlı bir kavram ortaya koymuş ve bu kavram sonraları yalnız mekanikte değil matematiğin de bir çok alanında faydalı olmuştur. Bu yazımızda eylemsizlik momentinin geometri ve analiz problemlerinin çözümünde nasıl kullanıldığını inceleyeceğiz. Önce maddesel noktalar sisteminin ağırlık merkezi ve onun özelliklerini kısaca hatırlayalım. Okuyucularımız ayrıntılı bilgileri yukarıda adı geçen makalemizden elde edebilir. Kütlesi m olan maddesel A noktasını mA ile gösterirsek $(m_1A_1, m_2A_2, \cdots, m_nA_n)$ gibi maddesel noktalar siteminin ağırlık merkezi

$$m_1\vec{GA_1} + \cdots + m_n\vec{GA_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

bağlantısını sağlayan bir G noktasına deriz. Herhangi bir O noktası için $m = m_1 + \cdots + m_n \neq 0$ olmak şartıyla

$$(m_1\vec{OA_1} + \cdots + m_n\vec{OA_n}) : (m_1 + \cdots + m_n) = \vec{OG} \quad \text{olur.}$$

Örneğin bir ABC üçgenin kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ ise ve A, B, C, köşeleri sırası ile a, b, c, kütleleri ile techiz edilmişse, bu üçgenin ağırlık merkezi içteğet çemberinin merkezi olur.

Not: Aşağıda A maddesel noktanın m kütlesi hem pozitif, hem de negatif olmasına izin veriyoruz, yani $m \in \mathbb{R}$ kabul ediyoruz.

* Mimar Sinan Üniversitesi, Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

2. EYLEMSİZLİK MOMENTİ. LAGRANGE - JACOBİ FORMÜLÜ:

Kütleleri $m_1, \cdots, m_n (m_i \in \mathbb{R})$ olan $(m_1, A_1, m_2, A_2, \cdots, m_n A_n)$ maddesel noktalar sistemi göz önüne alalım, $m = m_1 + \cdots + m_n \neq 0$ olsun A ve B noktalar arasındaki uzaklığı $|AB|$ gibi göstereceğiz.

Tanım:

$$I_p = m_1|PA_1|^2 + \cdots + m_n|PA_n|^2 \tag{2}$$

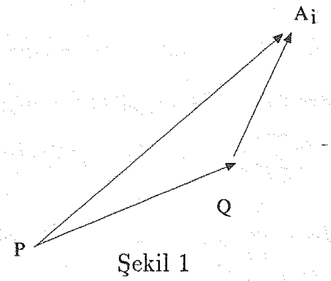
ile tanımlanan I_p sayısına $(m_1 A_1, m_2 A_2, \cdots, m_n A_n)$ siteminin P noktasına göre eylemsizlik momenti denir.

Örnek: Bir ABC üçgeninin $A, B, C,$ köşelerine 1 kütlesi yerleştirirsek yani, $(1A, 1B, 1C)$ sistemini ele alırsak bu sistemin çevrel çemberin merkezi olan O noktasına göre eylemsizlik momenti

$$I_o = 1 \cdot |OA|^2 + 1 \cdot |OB|^2 + 1 \cdot |OC|^2 = 3R^2$$

olur. R çevrel çemberin yarıçapıdır.

Şimdi $m_1 A_1, m_2 A_2, \cdots, m_n A_n)$ sisteminin herhangi iki P ve Q noktalarına göre eylemsizlik momentleri arasında bir bağıntı kuralım. Tanıma göre (Şekil 1)



Şekil 1

$$\begin{aligned}
I_p &= m_1|PA_1|^2 + \cdots + m_n|PA_n|^2 \\
&= m_1(\vec{PA_1} \cdot \vec{PA_1}) + \cdots + m_n(\vec{PA_n} \cdot \vec{PA_N}) \\
&= m_1(\vec{PQ} + \vec{QA_1}) \cdot (\vec{PQ} + \vec{QA_1}) + \cdots + m_n(\vec{PQ} + \vec{QA_n}) \cdot (\vec{PQ} + \vec{QA_n}) \\
&= m_1(\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}) + \cdots + m_n(\vec{PQ} + \vec{PQ}) + 2[m_1(\vec{PQ} \cdot \vec{PA_1}) + \cdots + m_n(\vec{PQ} \cdot \vec{QA_n})] + \\
&+ m_1(\vec{QA_1} \cdot \vec{QA_1}) + \cdots + m_n(\vec{QA_n} \cdot \vec{QA_n}) \\
&= |PQ|^2(m_1 + \cdots + m_n) + 2\vec{PQ}(m_1\vec{QA_1} + \cdots + m_n\vec{QA_n}) + \cdots + m_1|QA_1|^2 + \cdots + m_n|QA_n|^2 \\
&= I_Q + m|PQ|^2 + 2\vec{PQ} \cdot (m_1\vec{QA_1} + \cdots + m_n\vec{QA_n})
\end{aligned}$$

eğer Q noktası $(m_1 A_1, m_2 A_2, \cdots, m_n A_n)$ sisteminin ağırlık merkezi olursa $m_1\vec{QA_1} + \cdots + m_n\vec{QA_n} = 0$ olur ve (3) ten

$$I_P = I_Q + m|PQ|^2 \tag{4}$$

formülünü elde ederiz. Bu formül büyük Fransız matematikçi Lagrange tarafından bulunmuştur ve Lagrange formülü diye adlandırılır. (Lagrange, Euler ve aşağıda adını anacağımız Jacobi aynı zamanda büyük mekanikçilerdir. XVII ve XIX yüzyıllar büyük matematikçilerin hem de büyük mekanikçiler olduğu yüzyıllardır. XX yüzyıl bu özelliği kayıp etmiş veya etmektedir).

Ağırlık merkezi G sistemin önemli bir noktası olduğu için sistemin bu noktaya göre eylemsizlik momenti için basit bir formül vardır. Bu formül Lagrange, Jacobi, Poisson gibi matematikçiler (mekanikçiler!) tarafından bağımsiz olarak verilmiştir. Geleneksel olarak bu formül Jacobi formülü diye adlandırılır.

Teorem (Jacobi formülü): $m = m_1 + \cdots + m_n \neq 0$ olmak üzere $(m_1 A_1, m_2 A_2, \cdots, m_n A_n)$ sisteminin ağırlık merkezi olan G noktasına göre eylemsizlik momenti

$$I_G = \frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j |A_i A_j|^2 \tag{5}$$

İspat: Teoremin ispatını $n = 3$ hali için yapalım. Herhangi n için benzer ispat geçerlidir. (m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3) sisteminin ağırlık merkezi G olsun önce A_1 noktasına göre (m_2A_2, m_3A_3) sisteminin eylemsizlik momentini hesaplayalım. $m = m_1 + m_2 + m_3$

$$I_{A_1} = I_G + m|A_1G|^2 \quad \text{(Lagrange formülüne göre)}$$

$$I_{A_1} = m_2|A_1A_2|^2 + m_3|A_1A_3|^2 \quad \text{(Tanıma göre)}$$

böylece $m_2|A_1A_2|^2 + m_3|A_1A_3|^2 = I_G + m|A_1G|^2$ olur. Her tarafı m_1 ile çarparsak

$$m_1m_2|A_1A_2|^2 + m_1m_3|A_1A_3|^2 = m_1I_G + mm_1|A_1G|^2$$

benzer olarak

$$m_2m_1|A_2A_1|^2 + m_2m_3|A_2A_3|^2 = m_2I_G + mm_2|A_1G|^2$$

$$m_3m_1|A_3A_1|^2 + m_3m_2|A_3A_2|^2 = m_3I_G + mm_3|A_1G|^2$$

bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak, ve $|A_iA_j| = |A_jA_i|$ olduğunu gözönüne alırsak

$$2m_1m_2|A_1A_2|^2 + 2m_1m_3|A_1A_3|^2 + 2m_2m_3|A_2A_3|^2 =$$

$$= mI_G + m(m_1|A_1G|^2 + m_2|A_2G|^2 + m_3|A_3G|^2) \quad \text{veya}$$

$$2(\sum_{i<j} m_im_j|A_iA_j|^2) = 2mI_G,$$

$$I_G = \frac{1}{m}(\sum_{i<j} m_im_j|A_iA_j|^2) \quad \text{olur}$$

3. LAGRANGE JACOBİ FORMÜLÜNÜN UYGULAMALARI:

Şimdi de (4) ve (5) formüllerinin geometri problemlerine uygulamalarını gösterelim. Aşağıda ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$ ile göstereceğiz.

Problem 1: ABC üçgeninin $[AD]$ açıortay, $|BD| = c_1, |DC| = b_1 [AG]$ kenarortay ise

a) $|AD|^2 = bc - b_1c_1$, olduğunu gösteriniz (Şekil 2).

b) $|AG|^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, olduğunu gösteriniz (Şekil 3).

Çözüm a) B ve C noktalarına sırası ile b ve c kütlelerini yerleştirerek (Şekil 2) (bB, cC) sistemini kuralım. Açıortay $[BC]$ yi yankenarlar oranında böldüğü için $bc_1 = cb_1$, yani D noktası (bB, cC) sisteminin ağırlık merkezi olur. (bB, cC) sisteminin A ya göre eylemsizlik momenti tanıma göre

$$I_A = bc^2 + cb^2 = bc(b + c),$$

D noktasına göre eylemsizlik momenti ise Jacobi formülüne göre

$$I_D = \frac{1}{b+c}(bc|BC|^2) = \frac{a^2bc}{b+c}$$

Lagrange (4) formülüne göre

$$I_A = I_D + (b + c)|AD|^2 \quad \text{veya}$$

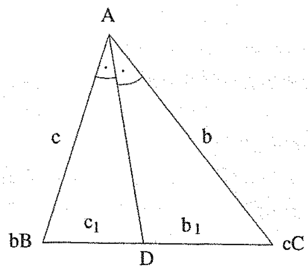
$bc_1 = cb_1$ eşitliğinden $b = \lambda b_1$, ve $c = \lambda c_1$ şeklindedir.

$|AD|^2 = \frac{I_A - I_D}{b+c} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc - \frac{\lambda^2 b_1c_1a^2}{\lambda^2(b_1+c_1)^2} = bc - \frac{\lambda^2 b_1c_1a^2}{\lambda^2 a^2} = bc - b_1c_1$ bulunur.

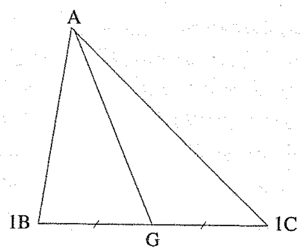
b) B ve C noktalarına 1 kütlesi yerleştiriliyor. $(1B, 1C)$ sistemini ele alalım o zaman G noktası bu sistemin ağırlık merkezi olacakdır. Tanıma ve Jacobi formülüne göre

$$\begin{aligned} I_A &= 1 \cdot c^2 + 1 \cdot b^2 = b^2 + c^2 \\ I_G &= \frac{1}{1 \cdot 1}(1 \cdot 1|BC|^2) = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Lagrange formülüne göre



Şekil 2



Şekil 3

$I_A = I_G + (1+1)|AD|^2$ bağıntısından $|AG|^2 = \dfrac{I_A - I_G}{2} = bc - \dfrac{b^2c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ bulunur.

Problem 2: P noktası ABC üçgeninin içinde herhangi bir nokta, G kenarortayların kesişme noktası, $|AP| = d_1, |BP| = d_2, |CP| = d_3$ ise

$$|PG|^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{3} - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} \quad \text{olduğunu gösteriniz.}$$

Çözüm: A, B, C köşelerine 1 kütlesini yerleştirirsek $(1A, 1B, 1C)$ sisteminin ağırlık merkezi G noktası olacaktır.

$$\begin{aligned}
I_P &= 1\cdot|AP|^2 + 1\cdot|BP|^2 + 1\cdot|CP|^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \\
I_G &= \frac{1}{3}(1\cdot 1\cdot|AB|^2 + 1\cdot 1\cdot|BC|^2 + 1\cdot 1|AC|^2) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \\
I_P &= I_G + 3\cdot|AG|^2 \Rightarrow |PG|^2 = \frac{I_P - I_G}{3} = \frac{d_1^2+d_2^2+d_3^2}{3} - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Sonuç 1: $|PG|^2 \geq 0$ olduğu için $(\star)$ den $a_1^2 + b_2^2 + c_3^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 2: (Avusturya Ulusal Matematik Olimpiyatı 1971) G noktası ABC üçgeninin kenarortaylarının kesişme noktası ise

$$3(|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2) = |AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu olimpiyat probleminin çözümü $(*)$ formülünden hemen çıkar. Gerçekten P noktası G ağırlık merkez ile çakışıyorsa yani $P = G$ olursa $|PG| = 0$ ve $3(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = a^2 + b^2 + c^2$ olur.

Problem 3: (Euler formülü) ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi O_1, yarıçapı r, çevrelçemberinin merkezi O_2, yarıçapı R ise $|O_1O_2|^2 = R(R-2r)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Üçgenin A, B, c köşelerine sırası ile a, b, c kütlesi yerleştirirsek içteğet çemberinin O_1 merkezi (aA, bB, cC) sisteminin ağırlık merkezi olur.

$$I_{O_1} = \frac{1}{a+b+c}(ab|AB|^2 + bc|BC|^2 + ac|AC|^2) = \frac{abc^2 + bca^2 + acb^2}{a+b+c} = abc$$

(aA, bB, cC) sisteminin O_2 noktasına göre eylemsizlik momenti, tanıma göre

$$\begin{aligned}
I_{O_2} &= a|OA|^2 + b|OB|^2 + c|OC|^2 = (a+b+c)R^2 \\
I_{O_2} &= I_{O_1} + (a+b+c)|O_1O_2|^2 \Rightarrow |O_1O_2|^2 = \frac{I_{O_1} - I_{O_2'}}{a+b+c} = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}
\end{aligned}$$

buluruz ABC üçgeninin $A(ABC)$ alanı için $A(ABC) = \frac{abc}{4R}, A(ABC) = \frac{a+b+c}{2}r$ formüllerinden $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$ buluruz. ( )

Yukarda yerine yazarsak $|O_1O_2|^2 = R^2 - 2R.r = R(R - 2r)$ buluruz.

Sonuç: (Matematik Dünyası) ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R, içteğet çemberinin yarıçapı r ise $R \geq 2r$ olduğunu gösteriniz.

Gerçekten, Euler formülünde $|O_1O_2|^2 \geq 0$ olduğu için $R - 2r \geq 0$ olmaktadır.

Problem 4: (Apollonius çemberi) $k > 1$ sabit bir sayı A ve B düzlem üzerinde iki nokta ise $\frac{|PA|}{|PB|} = k$ şartını sağlayan P noktalarının geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: Eğer P noktası $\frac{|PA|}{|PB|} = k$ bağıntısını sağlarsa, $|PA|^2 - k^2|PB|^2 = 0$ olur ve tersine eğer $(1A, -k^2B)$ sistemini ele alırsak bu sistemin P noktasına göre eylemsizlik momenti $I_P = 1 \cdot |PA|^2 - k^2|PB|^2 = 0$ olur. G noktası $(1A, -k^2B)$ sisteminin ağırlık merkezi olsun (G merkezinin niye $[AB]$ nin dışında olduğunu düşünün!) O zaman I_GA ve B noktaları ile sabit bir sayı olacaktır. Lagrange formülüna göre (Şek. 4)

$$I_P = I_G + (1 - k^2)|PG|^2, \quad \text{ve} \quad I_P = 0, \quad \text{o halde} \quad |PG|^2 = \frac{I_G}{k^2 - 1}$$

Böylece, $\frac{|PA|}{|PB|} = k$ şartını sağlayan P noktaları aynı bir G noktasından $\sqrt{I_G/(k^2 - 1}$ uzaklıkta noktalar olur, yani aranan geometrik yer bir çemberdir.

Not 1: Lagrange-Jacobi formülünde $I_P = I_G + m|PG|^2$ $m > 0$ olursa, $|PG|^2 \geq 0$ olduğu için $I_P > I_G$ eşitsizliğini buluruz.

Not 2: Eğer $(m_1A_1, \cdots, m_nA_n)$ sisteminde $m_1 > 0$ olursa Lagrange formülünden $I_p > m|PG|^2$ eşitsizlğini buluruz. Aşağıda bu iki eşitsizliği Lagrange-Jacobi eşitsizliği diye adlandıracağız.

Problem 5: P noktası ABC üçgeninin içinde herhangi bir nokta, $r_a, c\, r_b,\ r_c$ P noktasından kenarlara olan uzaklıklar, R_A, R_B, R_C üçgenin A, B, C köşelerine olan uzaklıklar ise

$$3(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) \geq (R_A \sin \hat{A})^2 + (R_B \sin \hat{B})^2 + (R_C \sin \hat{C})^2$$

olduğunu gösteriniz.

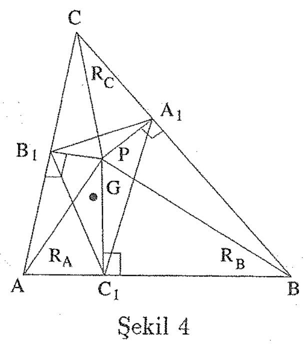
Çözüm: P noktasından BC, AC, AB, kenarlarına çizilen dikmelerin ayakları A_1, B_1, C_1 olsun ve $(1A_1, 1B_1, 1C_1)$ sistemini göz önüne alalım. O zaman $A_1B_1C_1$ üçgeninin ağırlık merkezi kenarortayların kesişme noktası olan G olacakdır. $(1A_1, 1B_1, 1C_1)$ sisteminin P ve G noktalarına göre eylemsizlik momenti

$$I_P = r_a^2 + r_b^2 + r_c^2, \quad I_G = \frac{1}{3}(|A_1B_1|^2 + |B_1C_1|^2 + |C_1A_1|^2)$$

olacaktır. A_1CB_1P dörtgeni $\widehat{PA_1C} + \widehat{CB_1P} = 180°$ olduğu için bir kirişler dörtgenidir ve bu dörtgenin çevrel çemberinin çapı $|CP|$ dir. Bu çember A_1B_1C üçgeninin de çevrel çemberi olduğundan $|A_1B_1| = |CP| \sin \hat{C}$, benzer olarak $|B_1C_1| = R_a \sin \hat{A}, |C_1A_1| = R_b \sin \hat{B}$, $I_P \geq I_G$ (Lagrange - Jacobi eşitsizliği) den

$$3(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) \geq (R_A \sin \hat{A})^2 + (R_B \sin \hat{B})^2 + (R_C \sin \hat{C})^2$$

bulunur.



Şekil 4

Problem 6: V_a, V_b, V_c sırasıyla ABC üçgeninin kenarortay uzunlukları, R ise çevrel çemberin yarıçapı ise $V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 \leq \frac{27}{4}R^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: G noktası kenarortayların kesişme noktası, O çevrel çemberin merkezi olsun. $V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 \leq \frac{27}{4}R^2$ eşitsizliğini $(\frac{2}{3}V_a)^2 + (\frac{2}{3}V_b)^2 + (\frac{2}{3}V_c)^2 \leq 3 \cdot R^2$ şeklinde yazarsak ve $\frac{2}{3}V_a = |GA|, \frac{2}{3}V_b = |GB|, \frac{2}{3}V_c = |GC|$ olduğunda hatırlarsak $(1A, 1B, 1C)$ sisteminin ağırlık merkezi G ye göre eylemsizlik momenti
$I_G = |GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2$ ve O noktasına göre eylemsizlik momenti $I_0 = 3R^2$ olur.
$I_O \geq I_G$ (Lagrange - Jacobi eşitsizliği) eşitsizliği aranan eşitsizliğe denktir.

Problem 7: (Cauchy eşitsizliği) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ve $b_1, b_2 \cdots, b_n$ reel sayıları için

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2).(b_1^2 + \cdots b_n^2)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

Çözüm: Genelliği bozmadan $b_i \neq 0$ kabul edebiliriz. Reel doğru üzerinde $A_1 = \frac{a_1}{b_1}, A_2 = \frac{a_2}{b_2}, \cdots, A_n = \frac{a_n}{b_n}$ sayılarının (veya geometrik dille dersek A_i noktalarını) ele alalım ve bu noktalara sırasıyla $m_1 = b_1^2, m_2 = b_2^2, \cdots, m_n = b_n^2$ yüklerini yerleştirelim. $(m_1A_1, \cdots, m_nA_n)$ sisteminin ağırlık merkezi reel doğru üzerinde

$$G = \frac{m_1A_1 + \cdots + m_nA_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

sayısı (noktası) olacaktır. Sıfır noktasına göre eylemsizlik momenti $I_0 = m_1A_1^2 + \cdots + m_nA_n^2$, dir. $I_0 \geq m|OG|^2$ eşitsizliğine göre

$$m_1A_1^2 + \cdots + m_nA_n^2 \geq (m_1 + \cdots + m_n)\frac{(m_1A_1 + \cdots + m_nA_n)}{(m_1 + \cdots + m_n)^2} = \frac{m_1A_1 + \cdots + m_nA_n}{(m_1 + \cdots + m_n)}$$

veya

$$(\frac{a_1}{b_1})^2b_1^2 + \cdots + (\frac{a_n}{b_n})^2b_n^2 \geq \frac{(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2}{b_1^2 + \cdots + b_n^2},$$

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \quad \text{olur.}$$

Problemler:

Aşağıdaki problemleri önce alıştığınız yolla çözmeye çalışınız. Sonra bu yazımızda kullanılan metodlarla çözünüz. Lagrange - Jacobi formüllerinin ne kadar kolaylıklar sağladığını sizlerin takdirine bırakırız.

Problem 1: ABC üçgeninin kenarortaylarının kesişme noktası G ve çevrel çemberinin merkezi O, yarıçapı R dir. $|GO| = \frac{1}{3}R$ ise ABC üçgeninin dik üçgen olduğunu gösteriniz.

Problem 2: ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I ise

$$\frac{|IA|^2}{bc} + \frac{|IB|^2}{ac} + \frac{|IC|^2}{ab} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 3: ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O, yarıçapı R, yüksekliklerinin kesişme noktası H ise $|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 4: (Stewart formülü) $[AD]$ doğrusu ABC üçgenini $[BC]$ tabanını $|BD| = c_1, |DC| = b_1$ olacak şekilde iki parçaya bölmektedir.

$$|AD|^2 = \frac{b_1c^2 + c_1b^2}{a} - b_1c_1$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 5: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ pozitif sayılar, $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ise