$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ DENKLEMİNİN ÖZEL DURUMLARDA ÇÖZÜMLERİNİN BULUNUŞU

Harun Karatosun *

A. Üçüncü dereceden bir bilinmeyenli $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ denkleminin simetrik iki kökünün $(x_1 = -x_2)$ olması için gerek ve yeter koşul $AB = C$ olmasıdır.
Kanıt: **Gerek Koşul** $x_1 = -x_2$ ise $AB = C$ olur.

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$$

$$x_1 = -x_2 \quad \text{ise} \quad x^3 - (-x_2 + x_2 + x_3)x^2 + (-x_2^2 - x_2x_3 + x_2x_3)x + x_2^2x_3 = 0$$

$$x^3 - x_3x^2 - x_2^{2x} + x_2^2x_3 = 0$$

Buradan $A = -x_3, B = -x_2^2C = x_2^2x_3$, yani $AB = C$ olduğunu elde ederiz.

Kanıt: **Yeter Koşul.** $AB = C$ ise $x_1 = -x_2$ olur.

$AB = C$ ise *(I)* denklemi $x^3 + Ax^2 + Bx + AB = 0$ olur.

$x_1 = -\sqrt{-B}$ için, $(-\sqrt{-B})^3 + A(-\sqrt{-B})^2 + B(-\sqrt{-B}) + AB = 0$

$x_2 = \sqrt{-B}$ için, $(\sqrt{-B})^3 + A(\sqrt{-B})^2 + B\sqrt{-B} + AB = 0$

$x_3 = -A$ için, $-A^3 + A^3 - AB + AB = 0$ olur.

$x_1 = -\sqrt{-B}$ ve $x_2 = \sqrt{-B}$ olduğundan $x_1 = -x_2$ bulunur.

Sonuç. $x^3+Ax^2+Bx+C = 0$ denkleminde $AB = C$ olması için gerek ve yeter koşul $x_{1,2} = \pm\sqrt{-B}$, $x_3 = -A$ dır. Denklem $(x + A)(x^2 + B) = 0$ şeklinde yazılır.
Örnek. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$ denkleminde $AB = C$ yani $-6 = -6$ dır. Denklemin kökleri $x_1 = -A = -2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ olur.
Örnek. $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$ denkleminde $AB - C = -20 + 20 = 0$. $x_1 = 5$, $x_2 = -2i$ ve $x_3 = 2i$ dir.

B. $AB \neq C$ durumunda $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ denklemini $k \neq 0$ olmak üzere

$\underbrace{x^3Ax^2 - (k - B)x - A(k - B)}_{I} + \underbrace{kx + C + A(k - B)}_{II} = 0$ şeklinde yazalım. I ile gösterdiğimiz kısım için $A'B' = -A(k - B) = C'$ koşulu sağlanır. O halde I'in kökleri $x = -A$ ve $x = \pm\sqrt{k - B}$ olacaktır. II'nin kökü ise $x = -A + \dfrac{AB - C}{K}$ dir. I ve II'nin kökleri çakışırsa bu aynı zamanda denklemin de kökü olacaktır. $x_1 = -A$ ise $\dfrac{AB - C}{k} = 0$ ve $AB - C = 0$ olur. Bu denklemin simetrik iki kökü olmasını gerektirir. Bu durum A'da incelendi.

O halde $x_1 = -A + \frac{AB-C}{k} = \pm\sqrt{k - B}$ durumunda $k - B = x_1^2$ olur. Gerçel kök durumunda $k - B = x_1^2 > 0$ olduğundan $k > B$ olmalıdır.

---

* Öğ. Kd. Yzb., Kuleli Askeri Lisesi, Matematik Öğretmeni

O halde *(I)* denkleminde $AB - C$ nin bölenleri (k sayıları) içinden B den büyük olanlardan $k - B = x_1^2$ koşulunu sağlayan arayalım. k ve x_1 sayıları için $x_1^2 = k - B$ yi *(I)* denklemine yazarsak

$$x_1(k-B) + A(k-B) + Bx_1 + C = kx_1 + Ak + C - AB$$

$k(x_1 + A) + C - AB = 0$ şartını sağlayanlar *(I)* denkleminin kökü olur.
Örnek. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ denkleminde $AB - C = 4 - (-6) = 10$, $AB - C = 10$'un bölenlerinden, $B = 1$ den büyükler $k = 2, 5, 10$ sayılarıdır.
$k = 2$ ise, $k - B = 1^2 \Rightarrow x_1 = \pm 1$ olacağından $k(x_1 + A) + C - AB = 2, (\pm 1 + 4) - 10 = 0$ $x_1 = 1$ olduğunu verir.
$k = 5$ ise, $k - B = 5 - 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow x_2 = \pm 2$ olacağından $5(\pm 2 + 4) - 10 = 0$ için $x_2 = -2$ bulunur.
$k = 10$ ise, $k - B = 10 - 1 = 9 = 3^2 \Rightarrow x_3 = \pm 3$ olacağından $10(\pm 3 + 4) - 10 = 0$ için $x_3 = -3$
O halde $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ denkleminin kökleri $1, -2$ ve -3 tür.

C) $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ denkleminin iki katlı kökü x_3 ve diğer kökü x_1 varsayalım.

$$(x - x_3)^2(x - x_1) = x^3 + (-2x_3 - x_1)x^2 + (x_3^2 + 2x_3x_1)x - x_1x_3^2 = 0$$

olur.
$A^2 - 3B = (x_3 - x_1)^2$ ve $x_3 - x_1 = \pm\sqrt{A^2 - 3B}$ olur.

$x_1 + 2x_3 = -A$, $x_3 - x_1 = \pm\sqrt{A^2 - 3B}$ eşitlikleri toplanarak $x_3 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}$ bulunur. $x_1 = -A - 2\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)$ olur.

$$-C = x_1x_3^2 = \left[-A - 2\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)\right]\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)^2$$

yazarsak

$$-C = -A\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)\left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}\right)^2$$

bulunur. $-C = -Ax_3 - 2x_3x_3^2$ yani $-2x_3^3 - Ax_3^2 + C = 0$ olur. O halde katlı kök x_3, $2x^3 + Ax^2 - C = 0$ denkleminin köküdür. $2 \cdot (x^3 + Ax^2 + Bx + C) = 0$, $2x^3 + Ax^2 - C = 0$ denklemleri birbirlerinden çıkarılarak bulunan

$$Ax^2 + 2Bx + 3C = 0 \qquad (II)$$

denkleminin bir kökü x_3 dür.

Benzer şekilde $3 \cdot (x^3 + Ax^2 + Bx + C) = 0$ ve $Ax^2 + 2Bx + 3C = 0$ denklemleri birbirlerinden çıkarılarak bulunan

$$3x^2 + 2Ax + B = 0 \qquad (III)$$

denkleminin de bir kökü x_3 dür.

Görüldüğü gibi x_3, II ve III denklemlerinin ortak bir köküdür. Bu kök $3 \cdot (Ax^2 + 2Bx + 3C) = 0$ ve $A \cdot (3x^2 + 2Ax + B) = 0$ denklemleri birbirlerinden çıkarılarak bulunan $(6B - 2A^2)x + 9C - BA = 0$ denkleminin de kökü olacağından $x_3 = \dfrac{BA - 9C}{6B - 2A^2}$ bulunur. $6B - 2A^2 \neq 0$ ve $A \neq 0$ olduğunda $x_1 = \dfrac{-8AB + 18C + 2A^3}{6B - 2A^2}$ bulunur.

$B = x_3^2 + 2x_3x_1 = x_3(x_3 + 2x_1)$ den

$$B = \left(\frac{AB - 9C}{6B - 2A^2}\right)\left(\frac{AB - 9C}{6B - 2A^2} + \frac{-16AB + 36C + 4A^3}{6B - 2A^2}\right)$$