EŞEKLİĞİN ALEMİ YOK!

Sinan Sertöz *

Anılar

Matematikte "eşek problemi" denince Pisagor'un dik üçgen teoremi akla gelir. Çocukluğumda okuduğum Hayat Ansiklopedisi bu yakıştırmayı dik üçgen teoreminin çözümünü veren çizimin, biraz da hayal gücüyle, kulaklarını dikmiş bir eşek başına benzetilmesine bağlıyordu. Yirmi yıl kadar sonra bu konuyu Gebze'de Cahit Arf'a açtığımda ondan başka bir açıklama daha öğrendim. Güya dik üçgen teoremini kanıtlamaya çalışıp da beceremeyenler bunu yeteneksizliklerine vereceklerine teoremin anlamsızlığından ve kanıt etmeye değmezliğinden dem vurup 'eşeklik' ederlermiş. Ve bundan dolayı bu teorem "eşek meselesi" olarak bilinirmiş...

Kimileri rahatlıkla eşeklik edip davranışlarını muhteşem bir teoreme takma ad yapmaktan çekinmezken Darüşşafaka yıllarımızın müzik öğretmeni sevgili Tahir Sevenay bize Camille Saint-Saëns'ın Hayvanlar Karnavalı adlı eserini açıklarken sıra eşeklere gelince Saint-Saëns'ın kibarlığına direnmez, kendisi de "uzun kulaklı şahsiyet" tamlamasını kullanırdı. Bu inceliğin içindeki muzip neşeyi anlayamaz, kıs kıs güler, alay ederdik. Yıllar sonra bu eşekliğimizin farkına vardığımızda kendimizi affettirmek için telaşlı hayallerimizde sık sık Tahir Beyden af diledik, ellerinden öper olduk. Ama nafile. Yapılan yaramazlıklar anılarda kalıcı...

Yakın Zaman

Türk matematik literatüründe bir başka "eşek meselesi" daha vardır ki hikayesi anlatmaya değer. Yıllar önce Türk Matematikçilerinin ilk internet tartışma ortamı olarak Mustafa Akgül tarafından `turkmath` listesi kuruldu. Daha bu liste ne işe yarar, nasıl kullanılır diye düşünmeye vakit kalmadan Ali Nesin "Nedir bu `'h'` harfinin anlamı `'turkmat'` kelimesinin yanında?" diyerek ilk tartışmayı başlattı. Bu `'h'` harfi kimilerinin gururuna bir 'diken' gibi batarken kimileri de böyle bir 'dikenden' gocunamayacak kadar duygusuz olmakla suçlandı.

Tartışma azmış yürümüş, karşılıklı eşeklikler ilerde bağışlanması zor düzeylere tırmanırken İngiltere'den Haluk, soyadını unutma eşekliğini gösterdiğim için beni bağışlasın, bu listenin amacını bize hatırlatmak için bir "eşek problemi" ortaya attı. O kızgınlıkla bu probleme saldırdık. Bu kez çözemeyenler sesini çıkarmadı da çözenler 'eşeklik' etti(k). Güya bu problem çok basitmiş de böyle yüksek seviyeli bir listede bu problemin ne işi varmış. Breh breh! Sanki o `'h'` harfinden dikenler yaratıp birbirine saldıranlar bizler değiliz.

Öte yandan Haluk, bizi bu seviyesi hiç birimize yakışmayan tartışmadan çekip çıkarsın diye, problemin başına bir de ödül koymuştu: Çözene İskender döner... Fakat çözenlerin sayısı onun bütçesini tehdit eder düzeye çıkmaya başlayınca ödül süresinin dolduğunu ilan etmek zorunda kalmıştı. Ben de çözenler arasındaydım. Hâlâ bir yabancı bana selam verdiğinde Haluk İngiltere'den döndü, beni buldu ve İskender yemeğe götürecek diye düşünürüm. Sen hem çocuğun soyadını bile hatırlama, hem de İskender dönerini bekle. Bendeki de az eşeklik değil...

Soru

Haluk'un problemindeki eşek bir tarlanın kenarına bir iple bağlanır ve otlamaya bırakılır. Matematik problemlerinin köylüleri gerçek hayattaki köylülere benzemeyeceğinden bu problemdeki köylünün de

* Bilkent Üniversitesi, Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

tarlası hem daire şeklindedir hem de tamamen çim ekilidir. Bir matematik problemine konu olmak için bu kadar 'tuhaflık' elbet yetmez. Bu köylünün bir de garip sorunu vardır. Tarlanın kenarına bağladığı eşeğin ipini ne kadar uzun tutmalıdır ki eşeği tarladaki çimlerin en fazla yarısını yiyebilsin. Ne diyelim, Allah başka dert vermesin...

Sorudan Modele

Bir 'gerçek hayat' problemini çözmek için önce onu modellemek gerekir. Modellemek demek problemi matematik tekniklerinin uygulanabileceği bir biçime sokmak demektir. Bu arada matematiğin anlayacağı ama çözemeyeceği biçimlerden de uzak durmakta yarar vardır. Elbette asıl göz önünde tutulması gereken konu, eğer matematik teknikleri, olur ya, bu problemi çözerse, bu teknik çözümü ilk baştaki problemdeki soruyla ilgilendirebilecek konumdan uzaklaşmamaktır.

Bu problemi modellemeye önce eşekten başlamakta yarar var. Ne de olsa tüm sorun onun başının altından çıkıyor... Örneğin ipin uzunluğuna eşeğin başının uzunluğunu katmaya kalksak, hatta eşek zorlayınca ipin ve boynunun doğal esnekliklerinden dolayı mesafenin biraz uzayabileceğini göz önüne alsak içinden çıkılmaz bir problemle karşılaşırız. Bizim İskender de hayal olur. Öyleyse eşeğin boynunu ve probleme zaten etki etmeyecek diğer boyutlarını ihmal edelim: *eşek* olsun *bir nokta.*

İpin esnekliğinin katkısının çok küçük olacağını kabul edip ipi de esnemez kısalmaz kabul edelim: *ip* olsun *bir doğru parçası.*

Zaten tarlayı bize daire biçiminde diye tanıttılar. Hiçbir gerçek tarlanın tam daire olamayacağını, sınırlarındaki pütürlerin, belirsizliklerin denklemini yazmanın dile getirip başımıza iş almayalım. *Tarla* olsun *bir daire.*

Eşek tarlanın kenarına bağlanmıştı. Muhtemelen sağlam bir kazık çakıp eşeği buraya bağlamıştır köylü. Eşek çekiştirdikçe bu kazık yerinden oynar ama bunun da etkisi az olacağından kazığı da *dairenin çevresi üzerinde bir nokta* olarak düşünelim.

Çimlere karşılık da dairenin alanını düşünelim. Eşek ipinin uzandığı her yerdeki çimleri yiyeceğine göre bunu da şöyle tercüme edelim: *bir dairenin çevresi üzerinde alınan bir noktayı merkez olarak kabul eden bir başka daire var.*

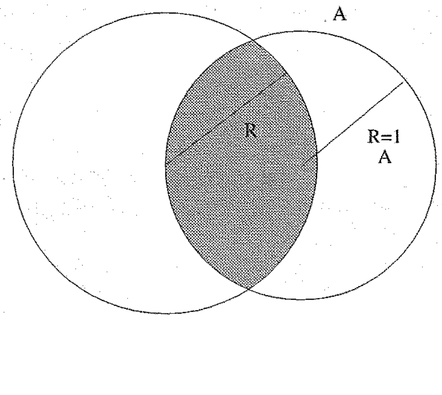
Eşeğin çimlerin yarısını yeme koşulunu da *iki dairenin ortak alanı birinci dairenin alanının yarısı* olmalı diye çevirelim.

Modele Yaklaştıkça

Şimdi ortada iki daire ve iki yarı çap var. Bunlara A ve B daireleri diyelim. Köylünün tarlası olarak düşüneceğimiz daire A dairesi, eşeğin gezip dolaşabileceği bölgeyi gösteren daire de B dairesi olsun. Birinci dairenin yarıçapı R_A ikincisinin yarıçapı da R olarak gösterilsin.

Verilen her R_A gerçel sayısı için sağlayan bir R gerçel sayısı arıyoruz. R_A sayısı elbette kullandığımız uzunluk birimine göre değişen bir sayı olacak. Ama birim değişse bile uzunluk değişmeyeceğinden hesaplarda gereksiz 'hamallık' yapmamak için yeni bir uzunluk birimi icat edelim ve buna göre $R_A = 1$ birim olsun.

Problem, verilen şartları sağlayan, bir R sayısı bulmaya dönüştü. (bkz Şekil 1.)



Şekil 1

R ne olmalı ki taralı olan $\frac{\pi}{2}$ olsun? Yada R ne olmalı ki A dairesinin taranmamış bölgesinin alanı $\frac{\pi}{2}$ olsun? (!)

Biraz Matematik

Bu aşamada da o 'verilen koşulların' formüle edilmesiyle ilgilenelim. Yarıçapı bir birim olan bir çemberin üzerinde bir nokta alıyoruz. Bu noktayı merkez olarak kabul eden R yarıçaplı bir çember çiziyoruz. İki çemberin ortak bölgesinin alanının $\pi/2$, yani yarıçapı bir birim olan dairenin alanının yarısı, olması için R sayısının kaç olması gerektiğini araştırıyoruz.

Elimizdeki denklemin bir tarafında $\pi/2$ öbür tarafında da tarif ettiğimiz şekilde kesişen iki dairenin ortak alanı var. Demek ki elle tutulur gözle görülür bir denklem kurabilmek için şimdi yapılacak şey böyle bir kesişimin alanını yazmak.

Bir süre otları ve eşekleri unutup yüksek matematik, yani tek değişkenli türevlenebilir fonksiyonlar matematiği, yapacağız. Burada adı geçen tek değişken elbette eşeğin ipinin uzunluğu olarak düşündüğümüz R sayısı. Fonksiyon da iki dairenin ortak alanı. Elbette R değişirse bu alan değişecek.

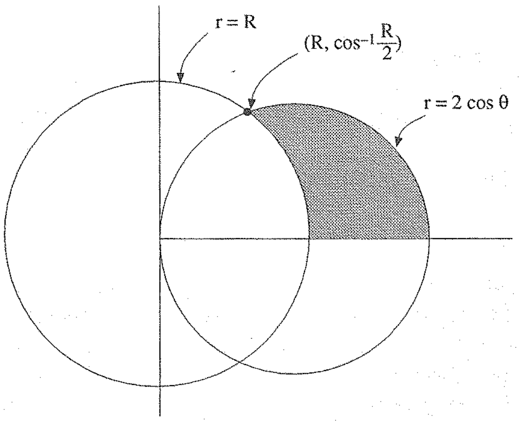
Elimizde tek değişkenli bir fonksiyon olduğu kesin. Kesin olmayansa bu fonksiyonun türevlenebilir olması. Aslında bu noktada bunu bilmiyoruz. Ama tecrübeler, Eflatuncu doğa anlayışı, açık ya da gizli inançlar, bugüne kadar karşımıza çıkan ve doğal problemleri modelleyen fonksiyonların hemen hemen hepsinde olduğu gibi bu fonksiyonun da türevlenebilir olacağı umudunu bize veriyor. Biz bu umuda kanıp bazı şeyleri kontrol etmemezlik yapmayacağız. Ama bu umut olmasa, bu problemde kuracağımız fonksiyonun içinden çıkılması mümkün olmayan, daha önceki tecrübelerimizle anlayamayacağımız bir fonksiyon olacağı korkusu üzerimize sinse, bu problemi çözmeye yeltenmeyiz bile. İskender döneri de Haluk başkalarına ısmarlarken biz 'burnumuzu çekeriz' (anneanemin bir lafıdır!).

Her çözülen problem onun büyüklüğüne ve bilinmezliğine aldırmadan pervasızca onunla uğraşanlar tarafından çözülmüşdür. Bizim de uğraştığımız zaten alt tarafı bir "eşek meselesi".

Artık model olarak çizdiğimiz şekle bakıp denklemimizi kurmaya başlayabiliriz.

Bir Denkleme Doğru

Dairelerin kesiştiği yerin alanı birim dairenin alanının yarısı olacaksa, birim dairenin içinde kalan kesişme dışı alan da birim dairenin alanının yarısına eşit olacaktır. Ayrıca dairelerimizin merkezlerini birleştiren çizginin altında ve üstünde kalan şeklin birbirinin tıpatıp aynısı olacağını da gözleyelim.



Şekil 2

Şimdi Şekil 2'ye bakarsak problemi şu şekilde formüle edebiliriz: Öyle bir R sayısı bulalım ki şekildeki taralı alan $\pi/4$ olsun. Burada polar koordinatlar kullandığımıza dikkat edin; merkezi $(1,0)$ olan birim çemberin denklemi polar koordinatlarda $r = 2\cos\theta$ olarak verilir. Merkezi orijinde olan ve yarıçapı R olan çemberin denklemi de $r = R$'dir. Bu iki çember polar koordinatlarda $r = R$ ve $\theta = \pm\cos^{-1}\frac{R}{2}$ noktalarında kesişirler.

Taralı bölgenin alanını $A(R)$ ile gösterelim.

Hesap Lütfen!

Şimdi integral hesaplarına başlayabiliriz.

$$A(R) = \frac{\pi}{4} \tag{1}$$

olsun istiyoruz. Önce $A(R)$'yi hesaplayalım:
$A(R) = \int_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1}\frac{R}{2}} \int_{r=R}^{r=2\cos\theta} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1}\frac{R}{2}} \left(2\cos^2\theta - \frac{R^2}{2}\right) d\theta = \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta - \frac{R^2}{2}\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1}\frac{R}{2}}$.
Burada bir kenarı R ve hipotenüsü 2 olan bir dik üçgen kullanarak $\sin(2\cos^{-1}\frac{R}{2})$ için $\frac{R\sqrt{4-R^2}}{2}$ değerini bulup yerine koyarak

$$A(R) = \frac{1}{2}\frac{R\sqrt{4-R^2}}{2} + \left(1 - \frac{R^2}{2}\right)\cos^{-1}\frac{R}{2} \tag{2}$$

buluruz ve bunu (1) ile kıyaslarsak

$$\frac{R\sqrt{4-R^2}}{4} + \frac{1}{2}\left(2 - R^2\right)\cos^{-1}\frac{R}{2} = \frac{\pi}{4} \tag{3}$$

denklemini sağlayan R sayısını aradığımız sonucuna varırız.

Tek değişkenli fonksiyonlar teorisi, ve özellikle integral teknikleri, kullanarak uzun bir hikayeyi tek bir denklemin çözümüne indirgedik. Bize (3) nolu denklemi veren Şekil 2'ye tekrar bakarsak problemin bir anlamı olabilmesi için R uzunluğunun 0 ile 2 arasında olması gerektiğini buluruz.

Yine Şekil 2'ye, ya da (3) nolu denkleme, bakarak R arttıkça $A(R)$'nin, yani taralı alanın azalacağını görürüz. Demek ki $[0,2]$ aralığında (3) denkleminin bir tek çözümü var. $A(R)$ fonksiyonunun bu aralıkta türevlenebilir olması köklerinin nerelerde bulunacağı konusundaki beklentilerimizin doğru olmasını sağlıyor.

Çözüm Ararken

Var olduğunu ve tek olduğunu anladığımız çözümü şimdi arayabiliriz. Önce $\cos^{-1}$ fonksiyonunun kolay hesaplanabildiği değerleri deneyelim;

$$A(1) = 0.95661... > \frac{\pi}{4}, \qquad A(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

Böylece aradığımız R değeri için

$$1 < R < \sqrt{2}$$

sınırlamasını bulduk. Bu eşitsizlik bize $(2 - R^2)$'nin sıfırdan farklı olduğunu söylediğine göre (3) denkleminin her iki tarafını $(2 - R^2)$'ye bölüp $\cos^{-1}\frac{R}{2}$ ifadesini denklemin bir tarafında yalnız bırakmaya çalışırsak

$$\cos^{-1}\frac{R}{2} = \frac{\pi - R\sqrt{4-R^2}}{2(2-R^2)} \tag{4}$$

eşitliğini buluruz. Bu denklemin sağ tarafının $\pi/2$'den küçük olduğu koşulunun da koymamız gerekecek. Aksi takdirde bulacağımız çözümler cebirsel modelimizin çözümü olacak ama geometrik problemimizle ilgili olmayacaklar. Okuyucu

$$\frac{\pi - R\sqrt{4-R^2}}{2(2-R^2)} \quad < \quad \pi/2$$

eşitsizliğini kendisi çözüp

$$R < 1.27489...$$

olması gerektiğini kolayca görebilir.

Şimdi (4) denkleminde her iki tarafın cosinüsünü alıp problemi bir kök bulma problemine indirgeyebiliriz; R **sayısını** $(1, 1.27489)$ **aralığında seçmek koşuluyla**

$$F(R) \quad = \quad R - 2\cos\left(\frac{\pi - R\sqrt{4-R^2}}{2(2-R^2)}\right)$$

fonksiyonunun köklerini bulmak istiyoruz.

Mertlik Bozuluyor

Buraya kadar romantizmin rüzgarında geldik ama artık tüfeği icat edip mertliği bozmanın zamanı geldi. *Mathematica* programına aşağıdaki komutları verirsek

```
f:=R-2*Cos[(Pi-R*(4-R^2)^(1/2))/(2*(2-R^2))]
n:=55
N[FindRoot[f == 0, {R, 1,1,1.27489}, AccuracyGoal -> n,
            WorkingPrecision -> n],n]
```

bize derhal

```
{R -> 1.158728473018121517828233509933509149688292266492096512}
```

sonucunu verir. Bu sayı noktadan sonra 53 basamağa kadar doğrudur. (Son basamak, yani 54. basamak, 2 değil 1 olmalı...)

Çözümü tam olarak değil ama noktadan sonra elli üç basamaklık bir hassaslıkta bulduk. Pi sayısının kırk basamaklık açılımı ile evrenin bilinen çevresinin uzunluğunu bir protonun çapından daha küçük bir hassaslıkta hesaplayabileceğinizi düşünürseniz bulduğumuz bu sayıyı 'yaklaşık' diye küçümsemezsiniz!

Ayrılırken

Buraya kadar işler yolunda gitti ve bir sayı bulduk. Ama bu sayının π sayısının rasyonel bir katı olmaması, e sayısıyla doğrudan bir ilişkisinin görülmeyişi romantik matematikçileri biraz hayal kırıklığına uğrattı. Bu kadar çalış çabala, sonunda karşına çıka çıka hiç bir şablona sokamayacağın bir sayı çıksın. Hiç değilse bu sayı altın oranla bir şekilde ilgili olsaydı! Her halde bu sevimsiz durumu, problemin adındaki 'eşek' kelimesinin nereden geldiği konusunda alternatif bir açıklama olarak akılda tutmakta yarar var...

Bu yazının içinde "eşek" kelimesinin, değişik çekimleriyle birlikte, kaç kez geçtiğini bulmayı ve bunun Bernoulli sayılarıyla bir ilgisi olup olmadığını araştırmayı da doğal olarak okuyucuya bırakıyorum. Ben şimdi, evvelki cümlede sözünü ettiğim, "Bernoulli Sayıları" yazımı hazırlamaya gidiyorum...

Açıklama: Bu yazıda adı geçen tüm kişi ve kuruluşlar hayal ürünü olup hiç bir gerçek kişi ya da kuruluşu temsil etmezler. Haluk! Bu seni bağlamaz. Dönerleri unutmadık...