e'NİN HİKAYESİ

Nurettin Çalışkan *

Eskiler için matematik geometri idi, bu yüzden sayılar geometrik varlıklar olarak görülüyordu. Bugün bile, π sayısını çemberlerle olan ilişkisi dışında düşünmek çok zordur. Bugünkü matematiğin ise daha çözümlemeci ve "doğaya" uygunluğu bekleniyor. Bu anlamda, e sayısı geometrik "varlıkların" uzunluğu, alanı ya da hacmi olarak düşünülemez. Bu sayı daha çok transandantal bir sayı, doğal logaritmanın tabanı olarak bilinir. Katsayıları gerçel sayılar olan doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümlerinde de eksponansiyel (üssel) fonksiyonlar karşımıza çıkar.

Euler'in 1730 yılında eksponansiyel fonksiyonu kullanıldığı biliniyor. Diferansiyel hesap üzerine yazdığı elyazmalarında transandantal fonksiyonlardan bahsediyor ve bu fonksiyonları logaritmik ve eksponansiyel olarak ikiye ayırıyordu. Notlarında $dy = aydx$ diferansiyel denkleminin çözümünün $y = e^{ax}$ şeklinde olduğunu belirtiyordu.

1748 yılında yayımlanan *"Introductio Analysin Infinitorium"* adlı kitabında Euler e sayısını

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

şeklinde ifade ediyordu. Aynı kitapta, sürekli bölümlerle ifade ettiği e sayısı için

$$\begin{aligned} e &= <2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,\ldots> \\ &= <2,\overline{1,2n,1}>_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

gösterimini kullandı.

Bu yazıda önce $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ limitini inceleyeceğiz. Yardımcı teoremler kullanarak bu limitin varlığını kanıtladıktan sonra da $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ olarak tanımlanan fonksiyonu kullanarak e sayısının yaklaşık değerini bulmaya çalışacağız.

Bu ilk bölümde $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizisinin 1) Sınırlı 2) Monoton (artan yada azalan) olduğunu göstereceğiz.

YARDIMCI TEOREM 1: Her n pozitif tam sayısı için

$$(1) \qquad 2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

dir.

Kanıt: $k \le n$ olmak üzere bütün pozitif k sayıları için

$$(2) \qquad 1+\frac{k}{n} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

eşitsizliğinin doğruluğu gösterildiğinde $k = n$ durumunda (1) nolu eşitsizlik elde edilir.

(2) nolu eşitsizliği kanıtlamak için tümevarım yöntemini kullanacağız.

$k = 1$ için

$$1+\frac{1}{n} \le \left(1+\frac{1}{n}\right) < 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

olacağından (2) eşitsizliği doğrudur.

Herhangi bir $k < n$ pozitif tam sayısı için (2) eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. $k+1$ sayısı için (2) eşitsizliğini göstermeye çalışacağız.

k için kabul ettiğimiz eşitsizliği kullandığımızda

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\ge \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2}$$

* Doğu Akdeniz Üniversitesi,Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

$$> 1 + \frac{k+1}{n}$$

Böylece (2) nolu eşitsizliğin sol tarafını kanıtlamış olduk. Benzer şekilde

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$< \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$$
$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{(k+1)n-k^2}{n^3}$$
$$< 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}$$

olacağından, (2) eşitsizliğinin sağ tarafı doğrulanır.

YARDIMCI TEOREM 2: Her $n \geq 2$ tam sayısı için

$$\text{(3)} \qquad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

eşitsizliği doğrudur.

KANIT: Binom açılımı kullanarak

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots \\
&+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) \\
&+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+ \\
&\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+ \\
&\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})
\end{aligned}$$

olduğundan bu iki açılımın terimlerini karşılaştırdığımızda

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ olarak tanımlanan dizi, Yardımcı Teorem 1'den dolayı sınırlı, Yardımcı Teorem 2'den dolayı artandır. Sınırlı ve monoton dizilerin yakınsaklarını kullanarak,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

limitinin değerinin var olduğunu ve bu limit değerinin $(2,3)$ aralığında olduğunu söyleyebiliriz.

Yazımızın bu kısmında e sayısının yaklaşık değerini bulmaya çalışacağız.

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad 0 < x < \infty$$

fonksiyonu tanımlıyalım. Bu fonksiyon $x > 0$ için artan ve sürekli bir fonksiyondur, dolayısıyla tersi vardır ve süreklidir. n pozitif tam sayısı için

$$F(x^n) = \int_1^{x^n} \frac{dt}{t}$$

integralinde $t = s^n$ dönüşümü kullanıldığında F fonksiyonunun

$$F(x^n) = nF(x)$$

eşitliğini sağladığı görülür.

$$F(e) = \int_0^e \frac{dt}{t} = 1$$

eşitliği kullanılarak e sayısının yaklaşık değeri hesaplanabilir.

n pozitif tam sayısı için $y_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ve $z_n = F(y_n)$ alalım.

$z_n = F(y_n) = n\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t}$ olur.

$F(x)$ fonksiyonu x'e göre artan bir fonksiyon olduğu için

$$n\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{1}{n}\right) < z_n < n\left(\frac{1}{n}\right)$$

yada

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < z_n < 1$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizliği kullanarak $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $y_n = (1+\frac{1}{n})$'in limitinin e'ye eşit olduğu ortaya çıkar.

k pozitif tam sayı olmak üzere, $a = e^{\frac{1}{k}}$ tanımlıyalım.

$$\frac{1}{k} = \int_1^a \frac{dt}{t}$$

integralinde, $t = \frac{1+s}{1-s}$ dönüşümü yapıldığında, $b = \frac{a-1}{a+1}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{k} = 2\int_0^b \frac{ds}{1-s^2}$$

elde edilir.

$a > 1$ olduğundan, b sayısının $0 < b < 1$ özelliğini sağladığı görülecektir. $\frac{1}{1-s^2}$ fonksiyonunun $|s| < 1$ için yakınsak olan kuvvet serisini yazarak integralini aldığımızda

$$\frac{1}{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{2n+1}}{2n+1}$$

olur.

Bu eşitliğin ilk 3 terimini kullanılarak

$$f(t) = -\frac{1}{2k} + t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$$

fonksiyonunu tanımlıyalım. Bu fonksiyonun pozitif kökü b sayısı için yaklaşık değeri verecektir.

İlk yaklaşım değeri için $b_0 = \frac{1}{2k}$ alalım. Newton yöntemini kullanarak f fonksiyonunun kökü için ikinci yaklaşım değerini bulabiliriz. Böylece,

$$b_1 = \frac{1}{2k} - \frac{f\left(\frac{1}{2k}\right)}{f'\left(\frac{1}{2k}\right)}$$

$$= \frac{1}{2k} - \frac{(1/2k)^3/3 + (1/2k)^5/5}{1 + (1/2k)^2 + (1/2k)^4}$$

yada,

$$b_1 = \frac{120k^4 + 20k^2 + 6}{240k^5 + 60k^3 + 15k}$$

olarak hesaplanabilir.

$$a = \frac{1+b}{1-b}$$

eşitliğinde b_1 değerini yerine koyduğumuzda,

$$a^k = \left(\frac{240k^5 + 120k^4 + 60k^3 + 20k^2 + 15k + 6}{240k^5 - 120k^4 + 60k^3 - 20k^2 + 15k - 6}\right)^k$$

olacaktır. k için değerler verildiğinde a^k sayısının e'ye yaklaştığı görülür.

$k = 1$, $a^1 = 2.72781065$
$k = 2$, $a^2 = 2.71844588$
$k = 3$, $a^3 = 2.72299812$
$k = 4$, $a^4 = 2.71828445$
$k = 5$, $a^5 = 2.71828256$
$k = 6$, $a^6 = 2.718282065$
$k = 7$, $a^7 = 2.71828191$
$k = 8$, $a^8 = 2.71828186$

e sayısının ilk 500 rakamı aşağıdaki gibidir;

2, 7182818284 5904523536 0287471352
6624977572 4709369995 9574966967 6277240766
3035354759 4571382178 5251664274 2746639193
2003059921 8174135966 2904357290 0334295260
5956307381 3232862794 3490763233 8298807531
9525101901 1573834187 9307021540 8914993488
4167509244 7614606680 8226480016 8477411853
7423454424 3710753907 7744992069 5517027618
3860626133 1384583000 7520449338 2656029760
6737113200 7093287091 2744374704 7230696977
2093101416 9283681902 5515108657 4637721112
5238978442 5056953696 7707854499 6996794686
4454905987 9316368892 3009879312