TAMSAYILAR KÜMESİNDE DENKLEMLER

Nizamettin Şirinoğlu * C.Alparslan Ertuğ †

Bu yazımızda, tamsayılar kümesinde denklem çözümü ele alınmıştır. Temel amacımız, ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrencilere yardımcı olmaktır.

Dergimizin daha önceki sayılarında Diofant denklemleri hakkında çeşitli yazılar çıkmış olması nedeniyle, bu tip denklemler yazımızın kapsamı dışında tutulmuştur [1], [2], [3].

1. KURAMSAL ÖZET:

Aşağıda, çözülecek olan örneklerin daha kolay kavranmasını sağlamak için bazı hatırlatmalar yapılmıştır. Daha geniş bilgi için okuyucularımıza [4] ve [5] nolu kaynaklara başvurmalarını öneririz.

a ve b tamsayılar olmak üzere $a = bc$ eşitliğini sağlayan bir c tamsayısı varsa a, b ile bölünür denir ve $a|b$ ile gösterilir. Burada a bölünen, b bölen ve c ise bölüm olarak adlandırılır.

Bu tanım esas alınarak aşağıdaki özellikler kolayca elde edilebilir:

(i) $a|b$, $b|c$ ise $a|c$.

(ii) $a|c$, $b|c$ ise $(a+b)|c$ ve $(a-b)|c$.

(iii) $a|c$ veya $b|c$ ise $a.b|c$.

(iv) $a|b$ ve $a \neq 0$ ise $|a| \geq |b|$.

(v) $a|b$ ve $|a| < b$ ise $a = 0$'dır.

Eğer a ve b tamsayıları aynı bir d tamsayısına bölünürse, d ye bu sayıların ortak böleni; a ve b sayılarını bölen en büyük sayıya ise ortak bölenlerin en büyüğü (OBEB) denir ve (a,b) ile gösterilir.

(vi) $(a,b) = (|a|,|b|)$

(vii) Eğer $b|a(b \neq 0)$ ise, a ve b sayılarının OBEB'i $(a,b) = |b|$'dir $(a,b) = 1$ ise, a ve b sayıları aralarında asaldır denir.

(viii) a ve b tamsayılarının çarpımı c sayısına bölünürse ve $(a,c) = 1$ ise, $b|c$.

$p > 1$ doğal sayısının p ve 1'den farklı böleni yoksa, p sayısına asal sayı denir. Eğer $p = p_1 \cdot p_2$ biçiminde ve p_1, p_2 birden farklı doğal sayılar ise, p'ye bileşik sayı denir. 1, ne asal ne bileşik sayı kabul edilir.

Şimdi de asal sayılara ait bazı özellikleri sıralayalım:

(ix) Eğer p asal sayısı $a > 1$ doğal sayısına bölünüyorsa, $a = p$ olmalıdır.

(x) Her bir a tamsayısı ya p asal sayısına bölünür yada p ile aralarında asaldırlar.

(xi) Eğer iki tamsayının çarpımı p asal sayısına bölünürse, çarpanlardan en az biri p'ye bölünür.

(xii) a tamsayısının bire eşit olamayan en küçük böleni asal sayıdır.

(xiii) Bir karmaşık a doğal sayısının en küçük böleni, $\sqrt{a}$'dan büyük değildir.

Eğer $a > 1$ doğal sayısının asal bölenleri $\sqrt{a}$'dan büyük ise, (xiii) yardımıyla, a sayısının asal olduğunu söyleyebiliriz. Bu sonuç, bir a sayısının asal olduğunu göstermek için kullanılır.

(xiv) Aritmetiğin Temel Teoremi: Her doğal $a > 1$ sayısı, asal sayıların çarpımı şeklinde tek olarak gösterilebilir, (burada çarpanların sırası önemli değildir).

(xv) Asal sayılar kümesi sonsuzdur (Öklit).

(xvi) $p >$ doğal sayısının asal olması için gerek ve yeter koşul $p|(p-1)!+1$ olmasıdır (Wilson).

(xvii) Eğer $(a,p) = 1$ ise, $p|a^{p-1}-1)$ (Fermat).

a ve b tamsayıları $m \geq 1$ doğal sayısına bölündüklerinde aynı n kalanını veriyorlarsa, a ve b sayıları m modülüne göre denktir denir ve $a \equiv b(\text{mod} m)$ biçiminde gösterilir.

(xviii) Eğer $a \equiv b(\text{mod } m)$ ise;

1. $a = b + mt$ (t tamsayı)

2. $m|a - b$ olur.

(xix) $a \equiv c$ (mod m), $b \equiv c$ (mod m) ise $a \equiv b$ (mod m)'dir.

(xx) $a_1 \equiv b_1$ (mod m), $a_2 \equiv b_2$ (mod m), $\cdots, a_n \equiv b_n$ (mod m) ise, $a_1+a_2+\cdots+a_n \equiv b_1 + b_1 + \cdots + b_n$ (mod m)'dir.

* Yıldız Teknik Üniversitesi Öğretim Üyesi
† Makina Yüksek Mühendisi.

(xxi) $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}, \cdots, a_n \equiv b_n \pmod{m}$ ise, $a_1a_2\cdots a_n \equiv b_1b_2\cdots b_n \pmod{m}$'dir.

(xxii) $a \equiv b \pmod{m}$ ise $a^n \equiv b^n \pmod{m}, n \in N$.

(xxiii) $a \equiv b \pmod{m}$ ise $ka \equiv kb \pmod{m}, k \in Z$.

(xxiv) Eğer $a \equiv b \pmod{m}, a = a_1d, b = b_1d, (m,d) = 1$ ise, $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$.

(xxv) $a \equiv b \pmod{m}$ ise her k tamsayısı için $ak \equiv bk \pmod{mk}$.

2. ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER [6] - [8]:

Örnek 1: $x^3 - y^3 = xy + 61$ denklemini doğal sayılar kümesinde çözünüz.

$x = 0$ ya da $y = 0$ için denklemin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur. Denklemin sağ tarafı sıfırdan farklı her $x, y \in \mathbb{N}$ için ≥ 62 olduğundan, $x > y$ yani $x \geq y + 1$ olur. $x = d + y, d \geq 1$ alırsak,

$$(d+y)^3 - y^3 = y(d+y) + 1$$

olur. Buradan da,

$$(3d-1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 = 61 \qquad (1)$$

elde edilir.

$(3d-1)y^2 + (3d^2 - d)y \geq 0$ olduğundan, $d^3 \leq 61$ veya $d < 4$ olur. Yani d, 1, 2 yada 3'tür. $d = 1$ olduğundan, (1)'den;

$$2y^2 + 2y - 60 = 0$$

bulunur; buradan da, $y_1 = 5$ ve $y_2 = -6$ elde edilir. $y \in N$ olduğundan, $y = 5$ ve $x = y + d = 5 + 1 = 6$ olur. $d = 2$ halinde ise, (1)'den,

$$5y^2 + 10y - 53 = 0$$

bulunur; buradan da $y_{1,2} = (-5 \mp \sqrt{290})/5$ elde edilir. $y \in N$ olması gerektiğinden bu kökler uygun değildir. $d = 3$ olması halinde de köklerin doğal sayı olmadıkları kolayca görülebilir.

O halde denklemin doğal sayılarda yalnız $(x; y) = (6; 5)$ olan bir çözümü vardır.

Örnek 2: $13(x + y) = xy$ denklemini tamsayılar kümesinde çözünüz.

Denklemi; $13x + 13y - xy = 0$ şeklinde yazıp aşağıdaki gibi düzenlersek,

$$xy - 13y - 13x + 169 - 169 = 0$$
$$y(x - 13) - 13(x - 13) = 169$$
$$(x - 13)(y - 13) = 13^2$$

bulunur. $(x - 13)$ ve $(y - 13)$ tamsayılarının çarpımı aşağıdaki altı halde 169'a eşit olur:

$$\begin{array}{ll} x - 13 = 13, & y - 13 = 13 \\ x - 13 = -13, & y - 13 = -13 \\ x - 13 = 1, & y - 13 = 169 \\ x - 13 = -1, & y - 13 = -169 \\ x - 13 = 169, & y - 13 = 1 \\ x - 13 = -169, & y - 13 = -1 \end{array}$$

Buradan da aşağıdaki altı çözüm elde edilir:

$$(x_1 = 26, y_1 = 182), (x_2 = 0, y_2 = 0)$$

$$(x_3 = 14, y_3 = 182), (x_4 = 12, y_4 = 156)$$

$$(x_5 = 182, y_5 = 14), (x_6 = 156, y_6 = 12)$$

Örnek 3: $5^{2x} - 3 \cdot 2^{2y} + 5^x 2y - 1 - y^{y-1} - 2 \cdot 5^x + 1 = 0$ denklemini tam sayılar kümesinde çözünüz.

Denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazalım:

$$(5^x - 1)^2 + 2^{y-1}(5^x - 1) - 3 \cdot 2^{2y} = 0$$

$5^x - 1 = u$ dönüşümünü yaparsak,

$$u^2 - 2^{y-1}u - 3 \cdot 2^{2y} = 0$$

bulunur. Buradan da;

$$u_{1,2} = \frac{-2^{y-1} \mp 7 \cdot 2^{y-1}}{2}$$

$$u_1 = 3 \cdot 2^{y-1} \quad u_2 = -2^{y+1}$$

elde edilir.

1. Durum: $5^x - 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$

$x < 0$ tamsayısı için denklemin sol tarafı negatif, sağ tarafı ise pozitiftir. Yani, tam sayılar kümesinde $x < 0$ için çözüm yoktur. $x = 0, x = 1$ ve $x = 3$ olduğunda da çözüm olmadığı kolayca gösterilebilir.

$x = 2$ için; $24 = 3 \cdot 2^{y-1}$ veya $2^3 = 2^{y-1}, y = 4$ elde edilir.

Böylece bir çözüm, $(2; 4)$ bulunmuş olur. x'in üçten büyük olması halinde ise,

$$5^x - 1 = (5-1)(5^{x-1} + 5^{x-2} + \cdots + 5^2 + 5 + 1)$$

eşitliğinden,

$$4(5^{x-1} + 5^{x-2} + \cdots + 5^2 + 5 + 1) = 3 \cdot 2^{y-1}$$
$$5^{x-1} + 5^{x-2} + \cdots + 5^2 + 5 + 1 = 3 \cdot 2^{y-3} \quad (3)$$

bulunur. Açıktır ki, $y \leq 3$ sayısı çözüm olamaz. Çünkü (3) denklemin sağ tarafı üç yada kesirli olur.

$y \geq 5$ halinde ise, eşitliğin sol tarafının ikiye bölünmesi için x sayısı çift olmalıdır. $x = 2k$ olsun (2) denkleminden;

$$5^{2k} - 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$$

elde edilir. Buradan,

$$(5^2-1)(5^{2k-2}+5^{2k-4}+\cdots+5^2+1) = 3 \cdot 2^{y-1}$$

$$5^{2k-2}+5^{2k-4}+\cdots+5^2+1 = 2^{y-4}$$

bulunur.

k sayısı da çift olmalıdır: $k = 2n$. Dolayısıyla $x = 4n$ olur. x'in bu değeri için, (2) denklemi;

$$5^{4n} - 1 = 3 \cdot 2^{y-1}$$

$$(5^4-1)(5^{4n-4}+5^{4n-8}+\cdots+5^4+1) = 3 \cdot 2^{y-1}$$

$$13(625^{n-1}+625^{n-2}+\cdots+625+1) = 2^{y-5}$$

şekline gelir. Bu denklemin sağ tarafı $y \geq 5$ için 13'le bölünemez. Bu yüzden, $x > 3$ için tam sayılar kümesinde çözüm yoktur.

2. Durum: $5^x - 1 = -2^{y+1}$

$x \geq 0$ olduğunda denklemin sol tarafı sıfırdan büyük veya eşit, sağ tarafı ise negatif olduğundan tamsayılar kümesinde çözüm yoktur. $x < 0$ ise denklemi;

$$\frac{1}{5^{-x}} + \frac{1}{2^{-y-1}} = 1$$

şeklinde yazmak olasıdır. $(-x) > 0$ olduğunda ise, y'nin hiçbir değeri için denklemin sol tarafı 1'e eşit olamaz.

Buradan denklemin tam sayılar kümesinde, yalnızca, $(x,y) = (2,4)$ çözümünün bulunduğu sonucuna varırız.

Örnek. 4: Her bir $p > 5$ asal sayısı için $x^4 + 4^x = p$ denkleminin tamsayılar kümesinde kökü olmadığını gösteriniz.

x tamsayısı sıfırdan küçük ise, $f(x) = x^4+4^x$ tamsayı değildir. Eğer her hangi bir $x \geq 0$ tamsayısı için $f(x) = x^4 + 4^x$ tam sayı ise, bu sayının ≥ 5 veya bileşik sayı olduğunu gösterelim. $x = 0$ ve $x = 1$ için, $f(0) = 1 < 5, f(1) = 5$ olur.

$$\begin{aligned} x &= 2k(k \in \mathbb{N}) \text{ ise,} \\ f(x) &= 2^4k^4 + 4^{2k} = 2^k(k^4 + 4^{2(k-1)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2k+1(k \in \mathbb{N}) \text{ olduğunda ise,} \\ f(x) &= x^4 + 4 \cdot 4^{2k} = [x^4 + 4x^2(2k)^2 + 4(2^k)^4] \\ &\quad -4x^2(2^k)^2 \\ &= [x^2 + 2 \cdot (2^k)^2]^2 - (2x \cdot 26k)^2 \\ &= [x^2 + 2x \cdot 2^k + 2(2^k)^2][x^2 - 2x \cdot 2^k + 2(2k)^2] \\ &= [(x+2^k)^2 + 2^{2k}]]x-2)^2 + 2^{2k}] \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 5: Doğal sayılar kümesinde, $x^x + y^y = 2x + y$ denklemini çözünüz.

Denklemi,

$$x^x - 2x + y^y - y = 0$$

şeklinde yazalım ve düzenleyim:

$$x(x^{x-1} - 2) + y(y^{y-1} - 1) = 0$$

Eğer, $x > 2$ ise $x - 1 > 1; x > 2; x^{x-1} > 2^{x-1} > 2^1 = 2$ veya $x(x^{x-1} - 2) > 0$ olur.

$y > 1$ ise $y - 1 > 0, y^{y-1} > 1^{y-1} = 1$ veya $y(y^{y-1} - 1) > 0$ olur.

Buradan $x > 2, y > 1$ olduğunda sol tarafın sıfırdan büyük olduğu görülür.

$x = 1, x = 2$ ve $y = 1$ hallerinde ise, yalnız $x = 2, y = 1$'in çözüm olduğu kolayca görülür.

Örnek 6: $x^2 + x + 1 = r \cdot y$ denkleminin (x,y) tamsayılar kümesinde sonsuz sayıda asal r sayıları için çözümünün varlığını gösteriniz.

Tersini, yani verilen denklemin sonlu sayıda $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sayıları için tamsayılar kümesinde çözümleri olduğunu kabul edelim. $p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ olsun. $p^2 + p + 1$ sayısı $p_1, p_2, \cdots, p_n$'lerin hiç birine bölünemez. Bundan dolayı $p^2 + p + 1$ bileşik sayısı $p_1, p_2, \cdots, p_n$ den farklı olan asal d bölenine sahiptir. O halde, $(p, \frac{p^2+p+1}{d})$ tamsayı çifti $x^2 + x + 1 = dy$ denklemini sağlar. Böylece bir çelişki ile karşılaşırız. Buradan, denklemin tamsayılar kümesinde sonsuz asal sayısı için çözümünün olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 7: $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ denklemini sağlayan tüm tamsayı çiftlerini bulunuz.

Denklemin iki tarafını 4'le çarpıp 1 ekleyelim ve düzenleyelim:

$$\begin{aligned} (2x+1)^2 &= (2y^2+y)^2 + 3y^2 + 4y + 1 \\ (2x+1)^2 &= (2y^2+y)^2 + 2(2y^2+y) - (y^2-2y) \end{aligned}$$

olur. Bu ise, x'in hiç bir tam değeri için mümkün değildir. Geriye yalnızca $y=-1, y=0, y=1$ ve $y=2$ halleri kalır. bu değerler için aşağıdaki çözümler elde edilir:

$y=-1$
$x^2+x=0; x=0, x=-1;$ kökler
$(0,-1), (-1,-1)$.
$y=0$
$x^2+x=0; x=0, x=-1;$ kökler
$(0,0), (-1,0)$.
$y=1$
$x^2+x=4, x^2+x-4=0; x_{1,2}$
$=\dfrac{-1\mp\sqrt{17}}{2}$, kökler tam sayı değil.
$y=2$
$x^2+x-30=0; x=-6, x=5;$ kökler
$(-6,2), (5,2)$

Örnek 8: Hiçbir $n>2$ için,

$$x^n+(x+1)^n=(x+2)^n$$

denkleminin doğal sayılar kümesinde çözümünün olmadığını gösteriniz.

$x=0$ sayısının bu denklemi sağlamadığı kolayca görülür. $n>2$ için bu denklemi sağlayan $x\in N$ sayısının bulunduğunu varsayalım. $y=x+1$ olsun. Bu durumda $y\leq 2$ olur ve denklem

$$(y-1)^n+y^n=(y+1)^n \tag{4}$$

haline dönüşür. Buradan da,

$$\begin{aligned}(y+1)^n &= (\text{mod } y)\\ y^n &= 0\,(\text{mod } y)\\ (y-1)^n &= (-1)^n\,(\text{mod } y) \quad \text{olduğundan,}\\ 0 &= (y+1)^n-y^n-(y-1)^n\\ &= 1-(-1)^n\,(\text{mod } y)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Eğer n tek ise, $0=2$ (mod y) veya $0=-2$ (mod y) olur. Yani, 2 sayısı y'ye bölünür. $y\geq 2$ olması gerektiğinden $y=2$ olmalıdır. Bu halde ise,

$$0=3^n-2^n-1>0$$

olur. Bu olanaksızdır. n çift ise,

$$\begin{aligned}(y\mp 1)^n &= y^n\mp n\cdots y^{n-1}+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}\\ &\quad\cdot y^2\mp ny+1\\ &= \frac{n(n-1)}{2}y^2\mp ny+1\,(\text{mod } y^3)\\ 0 &= (y+1)^n-y^n-(y-1)^n=2ny\\ &\quad(\text{mod } y^3)\end{aligned}$$

olur. O halde $2ny$ sayısı y^3 ile bölünebilmelidir. y sayısı y^3 ile bölünmediğinden $2n$ sayısı y^2 ile bölünmelidir. Buradan $2n\geq y^2$ bulunur.

(4) denkleminin her iki tarafı y^n ile bölünürse,

$$(1+\frac{1}{y})^n=1+(1-\frac{1}{y})^2<2$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{y})^2 &= 1+\frac{n}{y}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{y^2}+\cdots+\frac{1}{y^n}\\ &> 1+\frac{n}{y}\\ &= 1+\frac{2n}{2y}\geq 1+\frac{y^2}{2y}=1+\frac{y}{2}\geq 2\end{aligned}$$

olur. Bu ise çelişkiye yolaçar. Böylece verilen denklemin çözümünün olmadığı kanıtlanmış olmaktadır.

Örnek 9: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x}=y-1$ denkleminin $x\in N$ ve $x\geq 2$ olduğunda tamsayılar kümesinde çözümünün olmadığını gösteriniz.

Her $x\in N$ için, $2^n\leq x<2^{n+1}$ koşulunu sağlayan bir $n\in N$ sayısı vardır. x'ten büyük olmayan bütün tek sayıların çarpımını A ile gösterelim. Denklemin her iki tarafını $2^{n-1}A$ ile çarpalım ve her bir $m\in N$ sayısını,

$$m=2^p\cdot q(p\in Z^+, q \quad \text{tek sayıdır.})$$

ile gösterelim. $m\leq x$ ise $q\leq x$'dir. Bu halde $m\neq 2^n$ ise $p<n$ olur. Eğer $p>n$ olsaydı,

$$m=2^p\cdot q\geq 2^{n+1}>x;$$

olurdu. $p=n$ durumunda ise $q\neq 1$ olduğu için,

$$m=2^p\cdot q\geq 2^n\cdot 3>2^{n+1}>x$$

olurdu.

$a_m=\frac{1}{m}\cdot 2^{n-1}\cdot A$ sayısı 2^n'den farklı her $m=2,3,\cdots,x$ için tam sayıdır.

$a_{2n} = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} \cdot A = \frac{A}{2}$ sayısı ise tamsayı olmadığından,

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x})2^{n-1} \cdot A = (y-1)2^{n-1}A$$

denkleminin sol tarafı tamsayı değildir; sağ tarafı ise tamsayıdır. Bu yüzden, denklemin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur.

Örnek 10: Eğer $x, y, z \in N$ sayıları $x^n + y^n = z^n$ denklemini sağlıyorsa, min $(x, y) \geq n$ olduğunu gösteriniz.

$x \leq y$ olduğunu kabul edelim. $z^n = x^n + y^n > y^n$ eşitsizliğinden, $z > y$'dir. Buradan, $y \in \mathbb{N}$ olduğundan $z \geq y + 1$ olur.

$$z^n \geq (y+1)^n = y^n + C_n^1 y^{n-1} + \cdots + 1 \geq y^n + ny^{n-1}$$

eşitsizliğinden,

$$x^n + y^n \geq y^n + ny^{n-1}$$

$$1^n \geq n \cdot y^{n-1} \geq n \cdot x^{n-1}$$

bulunur. Buradan da,

$x \geq n$ elde edilir. $y \geq x$ olduğundan, $\min(x, y) \geq n$ bulunur.

Örnek 11: x, y, z ve n pozitif tamsayılar ve $n \geq z$ ise, $x^n + y^n = z^n$ eşitliğinin sağlanamayacağını gösteriniz. (Fermat Teoreminin basit bir biçimi).

$n \geq z$ olmak üzere $x^n + y^n = z^n$ eşitliğini sağlayan x, y, z, n doğal sayılarının bulunduğunu varsayalım.

$x < z, y < z$ ve $x \neq y$ olduğunu görmek güç değildir; simetri dolayısıyla $x < y$ kabul edebiliriz.

O halde,

$$z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + yz^{n-2} + \cdots + y^{n-1})$$
$$\geq 1 \cdot nx^{n-1} > x^n$$

olacaktır. Bu ise, $x^n + y^n = z^n$ varsayımımızla çelişmektedir. Bu çelişki, problemde verilen önermenin doğrulanması demektir. [9].

Örnek 12: y sayısının birler basamağındaki rakamlarının $2, 4, 7$ ve 9 olması durumunda,

$$1 + 2 + \cdots + x = y$$

denkleminin x doğal sayıları için çözümünün olmadığı gösteriniz.

$x \in \mathbb{N}$ olduğundan,

$$1 + 2 + \cdots + z = \frac{x(x+1)}{2}$$

olur. Eğer;

$$\begin{aligned} m &= 10 \cdot k + p\, n = 10 \cdot r + q \text{ ise}, \\ mn &= (10k + p)(10r + q) = 10(10kr + kq + pr) \\ &\quad + pq \end{aligned}$$

olur. Yani mn çarpımının birler basamağındaki son rakamı pq, çarpımının birler basamağındaki son rakama eşittir.

x sayısının birler basamağındaki rakamlar $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ise, $x + 1$ sayısının birler basamağındaki rakamlar $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$ olur. Buradan $x(x + 1)$ sayısının birler basamağındaki rakamları $0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0$'dır.

Eğer, $y = [x(x + 1)/2]$ sayısının birler basamağındaki rakamları $2, 4, 7, 9$ olsaydı,

$$2\left[\frac{x(x+1)}{2}\right] = x(x+1)$$

sayısının birler basamağındaki rakamları $4, 8, 4, 8$ olurdu. Bu ise olanaksızdır.

Örnek 13: $2x^2 + 2 = 3y^2 + y$ (5)

denkleminin tam sayılarda kökü varsa,

$$x - y = p^2,$$

$$2x + 2y + 1 = q^2$$

$$3x + 3y + 1 = r^2$$

p, q ve r tamsayı olmak üzere şeklinde olduğunu gösteriniz.

Eğer $x = 0$ ise $y(3y + 1) = 1$'dır. y tam sayı olduğundan $y = 0$ olmalıdır.

Bu durumda,

$$x - y = 0^2, 2x + 2y + 1 = 1^2, 3x + 3y + 1 = 1^2$$

olur. $x \neq 0$ ise $y \neq 0$ ve $x \neq y$'dir (eğer $y = 0$ olsaydı, $2x^2 + x = 3x^2 + x$ veya $x = 0$ olurdu.)

d ile x ve y sayılarının en büyük ortak bölenini gösterelim, yani;

$$x = x_1 d, \; y = y_1 d \tag{6}$$

şeklindedir. x_1 ve y_1 tamsayılarının ortak böleni yoktur ve $x_1 \neq y_1$ dir. Buradan,

$$y_1 = x_1 + n, n \in Z \tag{7}$$

olur. Burada n sıfırdan farklı ve x_1 ile ortak böleni olmayan tam sayıdır. (6) ifadesini (5)'de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} 2x_1^2d^2 + x_1d &= 3y_1^2d^2 + y_1d \\ 2x_1^2d + x_1 &= 3y_1^2d + y_1 \end{aligned}$$

olur. Burada (7)'yi yerine yazarsak,

$$2x_1^2d + x_1 = 3d(x_1 + n)^2 + x_1n$$

$$dx_1^2 + 6dx_1n + 3dn^2 + n = 0 \qquad (8)$$

elde edilir.

Bu eşitliğin ilk üç terimi d ile bölünür. Bundan dolayı n sayısı da d ile bölünür. Son üç terim n'ye bölündüğünden dx_1^2 sayısı da n ile bölünür. x_1 ve n sayılarının ortak böleni olmadığından d sayısı n ile bölünür. Böylece $n = d$ veya $n = -d$ olmalıdır. $n = d$ durumunda (8)'den;

$$x_1^2 + 6x_1n + 3n^2 + 1 = 0$$

elde ederiz. Bu ise olanaksızdır. Çünkü, $x_1^2 + 1$ sayısı 3 ile bölünemez. Bunu göstermek için $x_1 = 3k, 3k+1, 3k+2$ yazmak yeterlidir.

$n = -d$ olduğunda ise $y_1 = x_1 - d$ ve (6)'dan,

$$y = y_1d = x_1d - d^2 = x - d^2$$

$$x - y = d^2 \qquad (9)$$

olur. (5)'ten aynı zamanda,

$$2x^2 - 2y^2 + x - y = y^2$$

$$(x - y)(2x + 2y + 1) = y^2$$

elde ederiz. (6) ve (9)'u yukarıda yerine yazarsak,

$$d^2(2x + 2y + 1) = y_1^2d^2$$

$$2x + 2y + 1 = d_1^2$$

buluruz.

Diğer taraftan (5) denkleminin yardımı ile,

$$(3x+3y+1)(x-y) = 3x^2+3xy+x-3xy-3y^2-y$$

$$= 3x^2 + x - (2x^2 + x) = x^2$$

yazabiliriz.

$$(x - y) = d^2,\ x^2 = x_1^2d^2 \quad \text{olduğundan,}$$

$$3x + 3y + 1 = x_1^2$$

olur.

3. ALIŞTIRMA SORULARI:

Soru 1: n ve p pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$x + py = n,\ x + y = p^2$$

denklem sisteminin, (x, y, z) pozitif tamsayılarından oluşan bir çözümünün bulunması için gerek ve yeter koşulu bulunuz (1905/1).

Soru 2: Eğer $n, x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ denkleminin (x, y) tamsayı çözümleri olmasını sağlayan bir pozitif tamsayı ise, en az üç tane böyle çözüm bulunacağını kanıtlayınız. $n = 2891$ olduğunda bu denklemin tam sayı çözümlerinin bulunmadığını gösteriniz (1982 / 4).

Soru 3: Aşağıdaki denklemlerin tamsayı çözümlerini bulunuz.

a) $1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^2$

b) $1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^z$

Soru 4: Aşağıdaki denklemin tamsayılar kümesinde çözümünü bulunuz:

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv$$

Soru 5: Öyle dört tane tamsayı bulunuz ki, her birinin karesi ile kalan üç sayının toplamı bir tamkare olsun.

KAYNAKÇA

[1] Selma Atabey, 1.Dereceden İki ve Üç Bilinmeyenli Diofant Denklemleri Matematik Dünyası, C.5, Sayı 1, 17-18, (1995).

[2] Selma Atabey, $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z} = d$ şeklindeki Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, C.5, Sayı 2, 19-20, (1995).

[3] Selma Atabey, İki Üslü Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, c.5, Sayı 4, 23-24, (1955).

[4] A. O. Gelfond, Denklemlerin Tamsayılarla Çözülmesi, Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı: 8, İstanbul, (1962).

[5] Don Redmond, Number Theory, Marcel Decker Ing., New York, (1996).

[6] Ulusal Matematik Olimpiyatları, (Rusça), Moskova, Nowka 1987.

[7] J.Browkin, S.Straszewicz, Polonya Matematik Olimpiyatları, Varşove, 1975.

[8] N.B. Vasilyev, A.A. Egorov, Uluslararası Matematik Olimpiyat Problemleri,(Rusça), Moskova, Nauka 1988.

[9] Hugo Steinhaus, One Hundred Problems in Elementary Mathematics, Dover Publications Inc., New York.