O zaman $a = -1$, $t \neq -1$ ve $p = \frac{2t}{t+1}$ dir. Gerçekten,

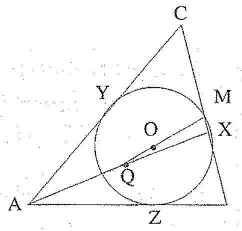
$$h = \frac{1}{2}(t + \bar{t}) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) = \frac{t^2+1}{2t} \quad \text{dir.}$$

M ile TH doğru parçasının orta noktasını gösterirsek,

$m = \frac{1}{2}(t + h) = \frac{3t^2+1}{4t}$ olur. A, P ve M noktalarının aynı doğru üzerinde olduklarını göstereceğiz. Bununla da herşeyi kanıtlamış olacağız. $\frac{m-a}{p-a}$ oranının gerçel sayı olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat $\frac{m-a}{p-a} = \frac{\frac{3t^2+1}{4t}+1}{\frac{2t}{1+t}+1} = \frac{(t+1)^2}{4t}$ oranı bir gerçel sayıdır, çünkü kendi eşleniği ile çakışır.

Soru 3: O merkezli bir çember $\widehat{ABC}$ üçgenine içten teğet ve bu çember BC kenarına X noktasında teğet ve M noktası da BC kenarının orta noktası olsun. OM doğrusunun AX doğru parçasının orta noktasından geçtiğini kanıtlayınız.

Çözüm: ABC üçgeninin iç teğet çemberinin birim çember ile çakışacak biçimde bir koordinat sistemi seçelim. Bu çemberin üçgenin BC, CA ve AB kenarlarına olan değme noktalarına sırayla X, Y ve Z diyelim.



O zaman,

$$a = \frac{2yz}{y+z}; \; b = \frac{2zx}{z+x}; \; c = \frac{2xy}{x+y},$$

$$m = \frac{1}{2}(b + c) = \frac{xy + 2yz + zx)x}{(x+z)(x+y)}$$

ve eğer Q noktası da AX doğru parçasının orta noktası ise

$$g = \frac{1}{2}(a + x) = \frac{xy + 2yz + zx}{2(y+z)}$$

dir. Q noktasının OM doğrusu üzerinde olduğunu göstermek için $\frac{m}{p}$ oranının gerçel sayı olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\frac{\overline{m}}{\overline{g}} = \frac{2\overline{x}(\overline{y}+\overline{z})}{(\overline{x}+\overline{z})(\overline{x}+\overline{y})} = \frac{2 \cdot \frac{1}{x}(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(\frac{1}{x}+\frac{1}{z})}$$

$$= \frac{2x(y+z)}{x+z)(y+z)} = \frac{m}{g}$$

dir. Bununla da kanit tamamlanmıştır.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A141. Bir $ABCD$ karesinin A ve B köşeleri merkez alınarak $|AC|$ yarıçaplı iki çember çiziliyor. Çemberlerin AB doğrusuna göre D ve C ile aynı tarafta bulunan kesişme noktası P olmak üzere, A dan BP doğrusuna AQ dikmesi çiziliyor. $\widehat{PAC} = \widehat{QAC}$ olduğunu kanıtlayınız.

A142. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ ve $[CA]$ üzerinde sırasıyla alınan noktalar D, E ve $DE \parallel AB$ olmak üzere BE doğrusunun AD doğrusunu kestiği nokta F ise, CF doğrusunun $[AB]$ nın orta noktasından geçtiğini kanıtlayınız.

A143. Bir ABC üçgeninde B ve C açılarının iç ve dış açıortayları çizilerek A noktasından bu açıortaylara dikmeler indiriliyor. Bu dört dikme ayağının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

A144. $x, y, a, b > 0$ için

$$\left(\frac{ax + by}{y}\right)^2 + \left(\frac{ay + bx}{x}\right)^2 \geq 2(a+b)^2$$

eşitsizliğini gösteriniz.

A145. n bir pozitif tam sayı olsun.

$$n! < p < n! + n + 1$$

koşulunu sağlayan kaç tane tam sayı olabilir?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y141. Odakları F, F' olan $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsinin herhangi bir teğeti d doğrusu olmak üzere F ve F' noktalarının d üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla S ve S' ise $|FS| \cdot |F'S'| = b^2$ olduğunu kanıtlayınız.

Y142. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan bir E noktasından BC, CD, DA, AB doğrularına sırasıyla EP, EQ, ER, ES dikmeleri indiriliyor

$$|EP| \cdot |ER| = |EQ| \cdot |ES|$$

olduğunu kanıtlayınız.

Y143. Çevrel yarıçapı R olan $A_1A_2 \cdots A_n$ düzgün çokgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan bir P noktası için

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 = 2nR^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

Y144. n pozitif bir tamsayı, I ise uzunluğu $\frac{1}{n}$ olan bir açık aralık olsun. Bu aralıkta $q \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ve $p \in \mathbb{N}$ olacak şekilde en çok kaç tane $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı bulunabilir?

Y145. Çevresi 10 birimden küçük olan rastgele bir ikizkenar üçgen çiziliyor. Bu üçgenin geniş açılı olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜMLER

A131. $a < b < c < d$ için

$$f(x) = |x-a| + 2|x-b| + 3|x-c| + 4|x-d|$$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm. $y = f(x)$ grafiği köşeleri $x = a, x = b, x = c$ ve $x = d$ de olan kırık bir çizgidir. $x < a$ için $f(x) = -10x + A$ olduğundan azalandır, $x > d$ için ise $f(x) = 10x + B$, yani artandır. Tüm bunlardan en küçük değerin $f(a), f(b), f(c)$ ve $f(d)$ değerlerinden biri olacağı görülür. $f(a) = -9a + 2b + 3c + 4d, f(b) = -a - 6b + 3c + 4d$, $f(c) = -a - 2b - c + 4d$ ve $f(d) = -a - 2b - 3c + 6d$ ve $a < b < c < d$ olduğundan $f(a) > f(b) > f(c)$ ve $f(c) < f(d)$ bulunur. O halde aranan en küçük değer $f(c)$ dir.

A132. n bir tamsayı olsun ve $1 \leq i \leq n$ için $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ aralığında x_i noktaları verilsin.

$$\left|\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $i = 1, 2, \cdots, n$ için $\frac{i-1}{n} \leq x_i \leq \frac{i}{n}$ eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{1}{n}\{0 + 1 + \cdots + (n-1)\} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{n}\{1 + 2 + \cdots + n\}$$

buluruz. $S = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}$ olsun; yukarıdaki eşitsizlikten

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \leq S \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

sadeleştirirsek, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ çıkar ki, bu istenen eşitsizliktir.

A133. y ekseni üzerinde sabit $(0, k)$ noktasında dik kesişen iki doğru x eksenini A ve B noktalarında kesiyorlar. $[AB]$ üzerine kurulan eşkenar üçgenin üçüncü köşesinin geometrik yeri nedir?

Çözüm. Verilen $(0, k)$ noktasında dik kesişen doğrulardan biri x-eksenini $A(-k/m, 0)$ diğeri de $B(mk, 0)$ noktasında kessin. $[AB]$ üzerine kurulan eşkenar üçgenin üçüncü köşesinin (u, v) noktası olduğunu kabul edelim. u ile v arasında bulunması gereken bağıntı, istenen geometrik yerin denklemidir. Gerekli işlemler sonucunda,

$$u = \frac{(m^2-1)}{2m}k \quad \text{ve} \quad v = \frac{\sqrt{3}(m^2+1)}{2m}k \quad (m \neq 0)$$

bulunur. m parametresi yok edilerek $\frac{v^2}{3k^2} - \frac{u^2}{k^2} = \frac{1}{2}$ hiperbolü elde edilir.

A134. Bir ABC üçgeninin B ve C köşelerinden geçen çember, AB ve AC doğrularını X ve Y noktalarında kesiyor. XY doğrusu BC doğrusunu bir Z noktasında kesiyorsa,

$$\frac{|BZ|}{|ZC|} = \frac{|XB||AB|}{|YC||AC|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. A noktasının çembere göre kuvvetinden

$$|AB| \cdot |AX| = |AC| \cdot |AY|$$

$$\text{ya da} \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AY|}{|AX|}. \tag{1}$$

bulunur. ABC üçgeninde ZY keseni için Menelaüs Teoreminden,

$$\frac{|AX|}{|XB|}\cdot\frac{|BZ|}{|ZC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}=1\cdot \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) kullanılarak,

$$\frac{|BZ|}{|ZC|}=\frac{|XB|}{|YC|}\cdot\frac{|BA|}{|AC|}$$

bulunur.

A135. Bir parabolün odağı F, parabol üzerindeki bir nokta P, P noktasının parabolün ekseni üzerindeki dik izdüşümü Q ve parabolün tepe noktası A ise, $|PQ|^2 = 4|AF||AQ|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $y^2 = 4px, (p > 0)$ parabolünün herhangibir noktası $P(x, 2\sqrt{px})$ dir. Bu parabolün odağı $F(p, 0)$ olup, P noktasının x-ekseni üzerindeki dik izdüşümü $Q(x, 0)$ noktasıdır. $|PQ| = 2\sqrt{px}$, $|AF| = p$ ve $|AQ| = x$ olduğundan $|PQ|^2 = 4|AF|\cdot|AQ|$ dur.

Y131. *MATEMATIK* sözcüğündeki harflerin tümünü kullanarak, bunların gelişigüzel dizilimleriyle elde edilen anlamlı, anlamsız tüm 9 harfli sözcüklerden kaç tanesinde iki ünsüz harf ard arda gelmez? *(Nurettin Ergun)*

Çözüm. 5 ünsüz, 4 ünlü olduğundan ard arda iki ünsüzün gelmediği dizilişler ünsüz, ünsüz, ünlü, ..., ünsüz şeklindedir. Bu tür dizilişleri elde etmek için 5 ünsüzü ve 4 ünlüyü ayrı ayrı sıralayıp ünlüleri sırayı bozmadan ünsüzlerin arasına koyarız. M, T, M, T, K harfleri $\frac{5!}{2!2!}$ farklı şekilde; A, E, A, I harfleri ise $\frac{4!}{2!}$ farklı şekilde dizilebilir. O halde aranan sayı $\frac{5!}{2!2!}\cdot\frac{4!}{2!} = 360$ tır.

Y132. Bir havuzun çevresinde saat yönünde sırayla 0 dan 60'a kadar numaralanmış 61 tane taş var. 0. taşın üzerindeki bir kurbağa önce 1. taşa, ordan 2. taşın üstünden atlayıp 4. taşa, oradan 4 taşın birden üstünden atlayıp 9. taşa, ... şeklinde sıçrayarak havuzun çevresinde dolanıyor. Kurbağa $k+1$'inci sıçrayışta saat yönünde $2k$ taşın üstünden atlayıp bir sonrakine sıçrıyor. Yeterince uzun bir süre sonunda kurbağanın üzerine başmadığı taş kalır mı? Kalırsa kaç tane böyle taş kalır? *(Albert Erkip)*

Çözüm. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$ olduğundan, kurbağa k sıçrayışta k^2 taş üzerinden atlayıp $0 \le x \le 60$ ve $x \equiv k^2 \pmod{61}$ numaralı taşın üzerine varmış olacaktır. Üzerine basılan taşlar (mod 61) de tam kare olan x sayılarına karşı gelen taşlardır. Şimdi $0 \le m, n \le 60$ için $m^2 \equiv n^2 \pmod{61}$ denklemini çözmeye çalışalım; denklemden $61|(m-n)(m+n)$, 61 asal olduğundan da $m = n$ veya $m = 61 - n$ ($n > 0$ iken) bulunur. O halde $1^2 \equiv 60^2$, $2^2 \equiv 59^2, \ldots\ 29^2 \equiv 32^2$ ve $30^2 \equiv 31^2 \pmod{61}$ dir ve tüm bu sayılar (mod 61) de birbirinden farklıdır. Buna $0^2 = 0$'ı da katarsak (mod 61) de 31 tane tam kare olduğu bulunur. Üzerine basılmamış taş sayısı 30 dur.

Y133. Bir parabolün herhangi üç teğetinin ikişer ikişer kesişme noktaları X, Y, Z ise XYZ çemberinin bu parabolün odağından geçtiğini kanıtlayınız.

Çözüm. Bir parabolde, odağın teğetler üzerindeki izdüşüm noktaları, bu parabolün tepesinden geçen teğet üzerinde bulunurlar. Bu nedenle, F odağının XY, XZ, YZ teğetleri üzerindeki izdüşümleri aynı doğru üzerindedir. Bu doğru XYZ üçgeninin bir Simson doğrusu olduğundan, (XYZ) çemberi F odağından geçer.

Y134. Birbirinin dışında bulunan A ve B merkezli iki çemberin ortak dış teğetleri bir C noktasında kesişiyor. Ortak iç teğetlerden biri de dış teğetleri D ve E noktalarında kesiyor. CDE çemberinin $[AB]$'nin orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

Çözüm. CB ışını, DCE açısının açıortayı olup, DE yayının orta noktasından geçer. Bu noktaya F diyelim. BDA dik açısı AB doğruparçasını gördüğünden A, D, B, E noktaları çemberseldir. Bu çemberin DE kirişinin orta dikmesi merkezden geçer. Bu çemberin merkezi F noktasıdır. Dolayısıyla (CDE) çemberi AB doğru parçasının orta noktasından geçer.

Y135. A, B, C açılarının ölçüleri sırayla 1,2,4 ile orantılı olan bir ABC üçgeninin alanını çevrel çemberinin yarıçapı cinsinden hesaplayınız.

Çözüm. n pozitif tamsayısı için

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n} \qquad (\star)$$

dir. Söz konusu üçgenin açıları $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$ olup a, b, c kenarların uzunlukları olmak üzere, alanı:

$$A = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\pi}{7}\cdot 2R\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}$$

dir. $(\star)$ ifadesinde $n = 3$ alındığında

$$\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

elde edilir. $\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7}$ olduğundan

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}R^2$$

bulunur.

MATEMATİK DÜNYASI

Öncelikle elinizdeki Matematik Dünyası Ekim 1996 sayısının 6 ay geç çıkması nedeniyle okurlarımızdan özür dilemek ve bu gecikmenin tüm sorumluluğunun bana ait olduğunu belirtmek istiyorum.

Matematik Dünyası 1991-1995 arasındaki ilk 5 yılında amaçladığı doğrultuda tutarlı bir çizgiye oturdu; her yaştan matematik meraklılarının izlediği ve aradığı bir dergi oldu. 1996 yılına başlarken geçmişteki bu başarılı çizginin süreceğini, yeni atılımlar yapmanın kolay olacağı düşüncesindeydik. Geri bakınca ilk 5 yıllık başarının ardında önce Cemal Koç'un sonra Şafak Alpay'ın editör olarak özverili çalışmalarının olduğu daha iyi anlaşılıyor.

1996 yılı Matematik Dünyası için bir takım değişikliklerle beraber bazı talihsizlikleri de beraber getirdi. İlk sıkıntımız Aralık 1995 sayımızın iyi dağıtılamamasından kaynaklandı, okurlarımızın abone işleri aksadı; sanırım sonradan eksiklikleri önemli ölçüde tamamlayabildik. Dağıtım sistemimizin ve matbaanın değişmesi ilk sayılarda bazı gecikmelere neden olduysa da bunu telafi etmeye çalıştık. Ancak Haziran 1996 ve özellikle Ekim 1996 sayılarında ciddi gecikmeler oldu. Buna kısmen şansızlıklar, kısmen ihmaller neden oldu. Ancak son sayımızın gecikmesi tamamen kişisel bir takım sorunlarımdan kaynaklanmıştır.

Bu gecikmenin belki bir sevindirici tarafı okurlarımızdan aldığımız şikayetlerin çokluğu. Zaman zaman "bu dergi artık tekrar çıkabilir mi" şeklindeki karamsarlığımızı dağıtan, bize cesaret veren okurlarımızın bu ısrarlı arayışları oldu. Bu sayıdan yakın bir süre sonra Aralık 1996 sayısını çıkarmayı düşünüyoruz. 1997 yılına ait tasarılarımız, önümüzdeki Aralık 1996 sayısında yer alacak. Okurlarımızın 1997 aboneliği konusunda bu sayıdaki açıklamaları beklemelerini rica ediyoruz.

Son olarak Matematik Dünyası'nın bu zor günlerinde bizi yalnız bırakmayan tüm okurlarımıza, bu sayının çıkabilmesinde bana yardımcı olan tüm arkadaşları ve özellikle sevgili Şafak Alpay'a teşekkür etmek istiyorum

Albert ERKİP