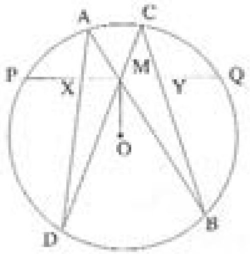
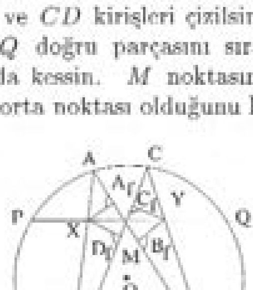
KELEBEK SORUSU ve KARMAŞIK SAYILAR

Selma Atabey

Değerli okuyucular, eğer arkadaşlarınızı ilk başta kolay görünen fakat o kadar kolay çözülemeyen bir soru ile zorlamak istiyorsanız onlara kelebek sorusunu sorunuz.



Soru 1: M, herhangi bir çemberin PQ kirişinin orta noktası olsun. M den geçen herhangi AB ve CD kirişleri çizilsin. AD ve BC kirişleri PQ doğru parçasını sırayla X ve Y noktalarında kessin. M noktasının XY doğru parçasının orta noktası olduğunu kanıtlayınız.



Çözüm: AB ve CD kirişlerine X ve Y noktalarından sırayla XA_1, XD_1, YB_1, YC_1 diklerini inelim. (Şekil - 2) kolaylık için, $MX = x$, $MY = y$ ve $PM = MQ = a$ diyelim.

$$\widehat{MXA_1} \sim \widehat{MYB_1},\ \widehat{MXD_1}, \sim \widehat{MYC_1},$$

$$\widehat{AXA_1} \sim \widehat{CYC_1},\ \widehat{DXD_1} \sim \widehat{BYB_1}$$

benzer üçgenlerinden

$$\frac{x}{y} = \frac{XA_1}{YB_1} \quad ; \quad \frac{x}{y} = \frac{XD_1}{YC_1};$$

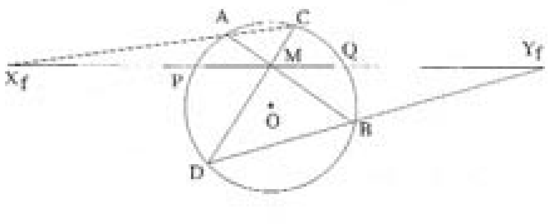
$$\frac{XA_1}{YC_1} = \frac{AX}{CY} \quad ; \quad \frac{XD_1}{YB_1} = \frac{DX}{BY}$$

bulunur. Bu son dört eşitlikten

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} &= \frac{XA_1.XD_1}{YB_1.YC_1} = \frac{AX.DX}{CY.BY}\frac{PX.QX}{PY.QY} \\ &= \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da, $x^2(a^2-y^2) = y^2(a^2-x^2)$ ya da $x^2 = y^2$ yani $x = y$ elde edilir. Böylece M noktasının XY doğru parçasının orta noktası olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi tekrar Şekil - 1'i göz önüne alalım ve AC ile BD doğrularını çizelim. AC ile BD doğruları PQ doğrusunu sırayla X_1 ve Y_1 noktalarında kesiyor (Şekil - 3).



M noktasının X_1Y_1 doğru parçasının da orta noktası olduğu görülüyor. Bunun doğruluğu da yukarıdaki kanıtın benzer yolu ile gösterilebilir.

Bu iki sorunun bağlantılı olduğu açıktır ve bunlara doğal olarak ortak çözüm aramalıyız. Böyle bir fırsat bulabiliriz. Eğer düzlemin noktalarını karmaşık sayılar ile gösterirsek, yukarıda verdiğimiz iki sorunun çözümüne geçmeden önce bir kaç ek açıklamalarda bulunacağız.

Düzlemde, düzlemin noktaları ile karmaşık sayılar arasında bire - bir eşleme yapılabilen koordinat sisteminin başlangıç noktası 0 olsun. Bu bire - bir eşlemede düzlemin $A, B, C, \cdots$ gibi noktalarının görüntüleri olan karmaşık sayıları sırayla $a, b, c, \cdots$ gibi harflerle gösterelim.) k, merkezi 0 noktası olan bir birim çember olsun. Bu birim çember üzerindeki noktalar $z.\overline{z} =$

çember üzerindeki noktalar $z.\overline{z} = 1$ özelliğini sağlar (Burada $\overline{z}$ ile z karmaşık sayısının eşleniği gösterilmiştir.) A ile B noktaları k birim çemberinin iki noktası ve z de AB doğrusu üzerinde bir nokta olsun. O zaman

$$\frac{b-a}{b-z} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{z}}$$

olur. Bu son eşitlikte de $\overline{a}$ yerine $\frac{1}{a}, \overline{b}$ yerine de $\frac{1}{b}$ alırsak $ab\overline{z} + z = a + b$ bulunur.

C ile D, k çemberinin başka iki noktası ise, AB ve CD doğrularının kesim noktası (eğer böyle bir nokta varsa) için

$cd\overline{z} + z = c + d$ eşitliği de vardır.

Buradan

$$z = \frac{(a+b)cd - (c+d)ab}{cd - ab}$$

bulunur. Bu formül aslında AB ve CD doğrularının kesişmeleri için gerek ve yeter şartın $cd \neq ab$ olduğunu gösterir.

Eğer A ile B noktaları, k çemberinin bir çapının uç noktaları olmayacak biçimde k çemberinin üzerinde iki nokta ise, k çemberine A ve B noktalarında çizilen teğetler S noktasında kesişir ve bu nokta için $s = \frac{2ab}{a+b}$ eşitliği sağlanır. Gerçekten, $\frac{s-a}{a} = -\frac{\overline{s}-\overline{a}}{\overline{a}}$ dir. Buradan da, $s + a^2.\overline{s} = 2a$ bulunur. Benzer şekilde de $s + b^2.\overline{s} = 2b$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $s = \frac{2ab}{a+b}$ dir.

1. Sorunun başka bir çözümüne geçelim. Hiç bir kısıtlama yapmadan verilen çemberin birim çember ile çakıştığını ve

$$\begin{aligned} g &= \cos\alpha + i\sin\alpha \\ p &= \cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha) \\ &= -\cos\alpha + i\sin\alpha \end{aligned}$$

olduğunu düşünebiliriz. O zaman, $m = \frac{1}{2}(p + g) = i\sin\alpha$ dir. Dolayısıyla $\overline{m} = -m$ dir.

M noktası AB doğrusu üzerinde olduğundan,

$$\begin{aligned} ab\overline{m} &+ m = a + b \quad \text{ya da} \\ abm &= m - a - b \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$cdm = m - c - d \quad \text{dir.}$$

X ve Y kesişim noktaları için

$$\begin{aligned} x &= \frac{(p+g)ad - (a+d)pg}{ad - pg} \\ &= \frac{2mad + a + d}{ad + 1} \quad \text{ve} \\ y &= \frac{2mbc + b + c}{bc + 1} \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman,

$$\begin{aligned} (x - m) + (y - m) &= \frac{mad + a + d - m}{ad + 1} \\ &+ \frac{mbc + b + c - m}{bc + 1} \end{aligned}$$

dir. Paydaları eşitlersek, elde edilen kesirin payı,

$$\begin{aligned} & (mad + a + d - m)(bc + 1) \\ + \; & (mbc + b + c - m)(ad + 1) \\ = \; & (mab)cd + abc + bcd + a + d - m + (mcd) \\ & ab + abd + acd + b + c - m \\ = \; & (m - a - b)cd + abc + bcd + a + d - m \\ & +(m - c - d)ab + abd + acd + b + c - m \\ = \; & (mcd + c + d - m) + (mab + a + b - m) \\ = \; & 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece, $(x - m) + (y - m) = 0$ olduğunu göstermiş olduk. Bu da bize M nin XY doğru parçasının orta noktası olduğunu gösterir. M nin X, Y, doğru parçasının da orta noktası olduğunu göstermek için aynı yorumları yaparız. Burada c yerine d ve d yerine de c alırız. (Şekil - 3)

Makalenin geriye kalan kısmında benzer yol ile çözülebilen iki soruyu daha inceleyeceğiz ve çözümlerini vereceğiz. Okuyucuya düşen görev bu soruların çözümlerini incelemek ve karmaşık sayıları kullanmadan bu soruları çözmektir.

Soru 2: PT ve PB verilen bir çemberin teğetleri olsun. B noktasından geçen AB çapını çizelim ve AB ye TH dikini çizelim. AP doğrusunun TH doğru parçasının orta noktasından geçtiğini kanıtlayınız.

Çözüm: Koordinat sistemini verilen çemberin birim çember ile çakışacak ve $b = 1$ olacak biçimde seçelim.