

1 Ocak'tan 1 Şubat'a kadar 3 gün

Toplam 29 günlük bir artış söz konusudur.

Bunun ortalaması $\frac{29}{11} = 2,6$ gündür.

Bu artış formüle edilmeye çalışılırsa m 1'den 11'e kadar değiştiğinde $[2, 6m - 0, 2] - 2$ fonksiyonu aynı artmayı verecektir. (Bu formül Reverend Zeller tarafından deneme yanılma yolu ile bulunmuştur.) Dolayısıyla N yılının m ayının ilk günü

$$d_N + [2, 6m - 0, 2] - 2$$

ifadesinin $(\text{mod } 7)$ 'ye göre negatif olmayan en küçük kalanı olarak ifade edilecektir.

N yılının m ayının k 'ncü gününe W dersek, W 'yı bulmak içinde aynı ayın ilk gününü veren formüle $k - 1$ ekleriz. Buna göre

$$W \equiv k + [2, 6m - 0, 2] - 2C + Y + [C/4] + [Y/4] \pmod{7}$$

olarak elde edilir ki bu formül bize Gregorian takviminde herhangi bir tarihin hangi güne geldiğini verir. Örneklerdirsek;

Örnek 1: 11 Mart 1996

$$k = 11 \quad m = 1 \quad C = 19 \quad Y = 96$$

$$W \equiv 11 + [2, 6 \cdot 1 - 0, 2] - 2 \cdot 19 + 96 + [19/4] + [96/4] \pmod{7}$$

$$W \equiv 11 + [2, 4] - 38 + 96 + 4 + 24 \pmod{7}$$

$$W \equiv 1 \pmod{7}$$

O halde 11 Mart 1996 Pazartesi'dir.

Örnek 2: 20 Temmuz 1969 (Aya ilk insanın çıktığı gün)

$$k = 20 \quad m = 5 \quad C = 19 \quad Y = 69$$

$$W \equiv 20 + [2, 6 \cdot 5 - 0, 2] - 2 \cdot 19 + 69 + [19/4] + [69/4] \pmod{7}$$

$$W \equiv 20 + 12 - 38 + 69 + 4 + 17 \pmod{7}$$

$$W \equiv 84 \pmod{7}$$

$$W \equiv 0 \pmod{7}$$

Pazar günü bulunur.

KAYNAKÇA

1. K.Rosen; Elementary Number Theory and Its Applications Addison Wesley 1988
2. J.Uspensky and M.A.Heaslet Elementary Number Theory McGraw - Hill NewYork, 1935.

GAUSS TOPLAMLARI ÜZERİNE

Emre Alkan *

$S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ ifadesine $k \geq 1$ tamsayısı için mertebesi k olan Gauss toplamı denildiğini biliyoruz.

$$S_1(n) = n(n+1)/2,$$

$$S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6,$$

$$S_3(n) = S_1^2(n), \dots$$

olduğunu hepimiz bilmekteyiz. Burada kendi başına ilginç olan soru, k sabitlendiğinde, $S_k(n)$ ifadesini n 'in bir fonksiyonu olarak elde etmektir. İsbabetli bir tahmin $S_k(n)$ 'in n 'e göre derecesi $k+1$ olan bir polinom olacaktır. Fakat bu polinomun katsayılarını açık seçik bulmak olanaklı mı? Bu yazıda polinomun katsayılarının Bernoulli sayılarıyla ilgisini kurup, Gauss toplamlarının bazı özelliklerine değineceğiz.

$\frac{x}{e^x - 1}$ fonksiyonunun $x = 0$ civarında Taylor serisine açılımına düşünelim. Pratikte bu açılımı şöyle elde ederiz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü Öğrencisi

olduğundan, bu kuvvet serisini bir polinom gibi düşünerek bir polinom bölmesi yaparız. Elde edilen açılım genelleşmiş olarak,

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \frac{B_3}{6!}x^6 - \dots$$

olarak yazılmakta ve B_k sayılarına Bernoulli sayıları denmektedir. Bu açılımda x 'in tek kuvvetlerin katsayısı x^1 hariç sıfırdır. Bunun nedeni ise $\frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}$ fonksiyonunun çift bir fonksiyon olmasıdır. (Aşında bazı yazarlar sıfırı da bir Bernoulli sayısı olarak kabul ederler.) Eşdeğer olarak $\beta_0 = 1, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_{2k+1} = 0$ ve $\beta_{2k} = (-1)^{k-1}B_k$ olmak üzere,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \frac{\beta_3}{3!}x^3 + \dots$$

yazabiliriz. n pozitif tamsayısı için $e^{nx} - 1 = nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \dots$ olduğunu gözönüne olarak

$$\frac{x(e^{nx} - 1)}{e^x - 1} = x(1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x})$$

ifadesine bakalım. Sonlu sayıda fonksiyon olduğundan $1 + e^x + \dots + e^{(n-1)x}$ ifadesinin Taylor serisi herbirinin Taylor serileri toplamıdır. Böylece

$$1 + e^x + \dots + e^{(n-1)x} = \sum_{k=0}^{\infty} (1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(n-1) \frac{x^k}{k!}$$

elde edilir. Dolayısıyla katsayılar Gauss toplamları ile ilgilidir. Kolayca görüleceği gibi $S_k(n-1), k! \frac{x(e^{nx} - 1)}{e^x - 1}$ ifadesinin Taylor açılımında x^{k+1} 'in katsayısıdır. Öte yandan

$$k! \frac{x(e^{nx} - 1)}{e^x - 1} = k! \frac{x}{e^x - 1} (e^{nx} - 1) = k! (\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \dots) \cdot (nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \dots)$$

yazılabilir. Burada iki kuvvet serisinin çarpımı elde edilmiştir. Bu serilerin Cauchy çarpımıdır ve x^n 'in katsayısı, $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ şeklinde verilir. Bunu pratikte şöyle değerlendirebiliriz. $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$ ifadesinde x^n terimini elde etmek için ilk parantezden a_0 ikincisinden $b_n x^n$ veya birinciden $a_1 x$, ikinciden $b_{n-1} x^{n-1} \dots$ şeklinde devam ederiz. Böylece x^n 'in katsayısı verilen şekilde olur. x^{k+1} elde etmek için ilk parantezden $\frac{\beta_r}{r!} x^r$, ikinci parantezden $\frac{n^{k+1-r}}{(k+1-r)!} x^{k+1-r}$ alırız. Burada $r = 0, 1, \dots, k$ olur ($r = k+1$ olamaz çünkü ikinci serinin sabit terimi yoktur.) Öyleyse bu durumda da x^{k+1} 'in katsayısı,

$$k! \sum_{r=0}^k \frac{\beta_r}{r!} \frac{n^{k+1-r}}{(k+1-r)!} = \sum_{r=0}^k \frac{1}{k+1-r} \frac{k!}{r!(k-r)!} \beta_r n^{k+1-r} = \sum_{r=0}^k \frac{1}{k+1-r} \binom{k}{r} \beta_r n^{k+1-r}$$

x^{k+1} katsayısını iki farklı şekilde elde ettik, Böylece $S_k(n-1)$ ve hemen

$$S_k(n) = \sum_{r=0}^k \frac{1}{k+1-r} \binom{k}{r} \beta_r (n+1)^{k+1-r}$$

elde ederiz. Hemen görüldüğü gibi bu ifade n 'ye göre derecesi $k+1$ olan bir polinomdur. Üstelik bu polinomun katsayıları β_r sayılarına, yani Bernoulli sayılarına bağlıdır.

Bundan sonra $S_k(n)$ ifadesini p asal bir sayı olmak üzere $(\text{mod } p)$ 'de inceleyeceğiz. Bunun için sadece, $S_k(p-1) = 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$ ifadesini $(\text{mod } p)$ 'de incelemek yeterlidir. Z_p çarpma işlemine göre çembersel bir gruptur. Böylece g bir ilkel kök olmak üzere,

$$S_k(p-1) \equiv 1 + g^k + g^{2k} + \dots + g^{(p-2)k} = \frac{g^{(p-1)k} - 1}{g^k - 1} \pmod{p} \quad \text{ve } g^k - 1 \equiv j \pmod{p}$$

ALKAN

olsun. $p-1|k$ ise $j \equiv 0 \pmod{p}$, $p-1 \nmid k$ ise $j \not\equiv 0 \pmod{p}$ olur çünkü g bir ilkel köktür. Öte yandan $g^{(p-1)^k} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ olduğundan $S_k(p-1)j \equiv 0 \pmod{p}$ olur. $p-1 \nmid k$ ise $j \not\equiv 0 \pmod{p}$ olduğundan $S_k(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$ olmalıdır. $p-1|k$ ise, de Fermat Teoremiyle $S_k(p-1) \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ olur. Sonuç olarak şunu elde etmiş olduk;

$$S_k(p-1) \equiv \begin{cases} 0, & p-1 \nmid k \\ -1, & p-1|k \end{cases} \pmod{p}$$

Böylece $S_k(n)$ ifadesini \pmod{p} 'de elde etmek için $1^k + 2^k + \dots + m^k$, $1 \leq m < p-1$ şeklindeki bir ifadeyi \pmod{p} 'de bulmak yeterlidir. Burada m, n 'in p ile bölümünden kalandır. Şimdi şu sonucu göstereceğiz.

Yardımcı Teorem: a_1, a_2, \dots, a_j uygun rasyonel sayılar olmak üzere,

$$S_1^k(n) = a_1 S_k(n) + a_2 S_{k+2}(n) + \dots + a_j S_{2k-1}(n), \quad k \text{ tek ise,}$$

$$S_1^k(n) = a_1 S_{k+1}(n) + a_2 S_{k+3}(n) + \dots + a_j S_{2k-1}(n) \quad k \text{ çift ise,}$$

$$S_1^k(n) S_2(n) = a_1 S_{k+2}(n) + a_2 S_{k+4}(n) + \dots + a_j S_{2k+2}(n) \quad k+1 \text{ tek ise,}$$

$$S_1^k(n) S_2(n) = a_1 S_{k+1}(n) + a_2 S_{k+3}(n) + \dots + a_j S_{2k+2}(n) \quad k+1 \text{ çift ise,}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt: Önce bazı somut örnekler ele alalım. $k=1$ için yapacak bir şey yok $k=2$ için $S_1^2(n) = S_3(n)$ olduğunu biliyoruz. $k=3$ için $S_1^3(n) = a_1 S_3(n) + a_2 S_5(n)$ olacak şekilde a_1, a_2 rasyonel sayıları bulalım. Bunun için en sağlam yol $S_1^3(n+1) = a_1 S_3(n+1) + a_2 S_5(n+1)$ olduğunu gözönüne alarak,

$$S_1^3(n+1) - S_1^3(n) = a_1(S_3(n+1) - S_3(n)) + a_2(S_5(n+1) - S_5(n))$$

bir polinom özdeşliği elde etmektir. Burada n bağımsız değişken gibi düşünülmektedir. Buradan

$$\frac{1}{8}((n+2)^3(n+1)^3 - (n+1)^3 n^3) = a_1(n+1)^3 + a_2(n+1)^5$$

ve kolayca $(n+2)^3 - n^3 = 8a_1 + 8a_2(n+1)^2$ ve $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}$ bulunur. Burada $a_1 + a_2 = 1$ olduğuna dikkat edelim. Şimdi $S_1^3(n) = \frac{1}{4}S_3(n) + \frac{3}{4}S_5(n)$ olduğunu tümevarımla gösterebiliriz. $n=1$ için $1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(a_1 + a_2 = 1$ olması tümevarımın başlangıcını sağlıyor). Tümevarım adımı ise sağladığımız özdeşlikten dolayı hemen yapılabilir. Okuyucu $k=4$ için benzer bir yol izleyerek

$$S_1^4(n) = \frac{1}{4}S_5(n) + \frac{1}{2}S_7(n)$$

olduğunu bulabilir. Şimdi genel olarak, k tek ise,

$$S_1^k(n) = a_1 S_k(n) + a_2 S_{k+2}(n) + \dots + a_j S_{2k-1}(n)$$

olarak (k çift durumu okuyucuya bırakılmıştır),

$$S_1^k(n+1) = a_1 S_k(n+1) + \dots + a_j S_{2k-1}(n+1)$$

ve böylece

$$S_1^k(n+1) - S_1^k(n) = a_1(S_k(n+1) - S_k(n)) + a_2(S_{k+2}(n+1) - S_{k+2}(n)) + \dots + a_j(S_{2k-1}(n+1) - S_{2k-1}(n)).$$

$$\frac{1}{2^k}((n+2)^k(n+1)^k - (n+1)^k n^k) = a_1(n+k)^k + a_2(n+1)^{k+2} + \dots + a_j(n+1)^{2k-1}$$

ve hemen,

$$(n+2)^k - n^k = 2^k a_1 + 2^k a_2(n+1)^2 + \dots + 2^k a_j(n+1)^{k-1}$$

Eğer bu özdeşliği sağlayan a_1, a_2, \dots, a_j rasyonel sayıları bulunabiliyorsa, her iki tarafın sabit terimleri karşılaştırılarak $a_1 + a_2 + \dots + a_j = 1$ elde ederiz. Dolayısıyla,

$$S_1^k(n) = a_1 S_k(n) + a_2 S_{k+2}(n) + \dots + a_j S_{2k-1}(n)$$

$n = 1$ için sağlanır ve tümevarımla tüm n 'ler için doğru olur. Böylece söz konusu eşitliklerin olabilmesi a_1, a_2, \dots, a_j 'nin bulduğumuz polinom özdeşliğinden belirlenebilmesine bağlıdır. k tek olduğu için,

$$\begin{aligned} 2^k a_1 + 2^k a_2 (n+1)^2 + \dots + 2^k a_j (n+1)^{k-1} &= (n+2)^k - n^k = (n+1+1)^k - (n+1-1)^k \\ &= 2 \binom{k}{k} + 2 \binom{k}{k-2} (n+1)^2 + \dots + 2 \binom{k}{3} (n+1)^{k-3} + 2 \binom{k}{1} (n+1)^{k-1} \end{aligned}$$

yazarak

$$a_1 = \frac{1}{2^{k-1}}, a_2 = \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{k-2} = \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{2}, \dots, a_j = \frac{k}{2^{k-1}}$$

Böylece a_1, a_2, \dots, a_j rasyonel sayılarını da belirlemiş oluyoruz. Sonuç olarak k tek iken,

$$S_1^k(n) = \frac{1}{2^{k-1}} S_k(n) + \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{2} S_{k+2}(n) + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} S_{2k-1}(n)$$

elde ederiz. Benzer şekilde k çift iken,

$$S_1^k(n) = \frac{k}{2^{k-1}} S_{k+1}(n) + \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{3} S_{k+3}(n) + \dots + \frac{k}{2^{k-1}} S_{2k-1}(n)$$

olduğuda görülebilir.

Buradan şu sonuç da çıkarılabilir. Her $k > 1$ tek sayısı için $S_k(n)/S_1^2(n)$ ifadesi $S_1(n)$ 'in rasyonel katsayılı bir polinomu olarak ifade edilebilir. Bunun kanıtını fazla uzatmamak amacıyla, bir özel durumda isteneni görelim. Genel halde de aynı yol izlenir. $k = 9$ için $S_9(n)/S_1^2(n)$ ifadesini istenen biçimde yazalım. Yazım kolaylığı için $S_k(n) \equiv S_k$ alacağız. Elde ettiğimiz eşitliklerden,

$$S_1^5 = \frac{1}{16} S_5 + \frac{5}{8} S_7 + \frac{5}{16} S_9, \quad (1)$$

$$S_1^4 = \frac{1}{2} S_5 + \frac{1}{2} S_7, \quad (2)$$

$$S_1^3 = \frac{1}{4} S_3 + \frac{3}{4} S_5, \quad (3)$$

$$S_1^2 = S_3 \quad (4)$$

yazılabilir. (1)'den $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - \frac{1}{5} - 2S_7$, (2)'den $S_7 = 2S_1^4 - S_5$ yazılıp yerine konursa $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - 4S_1^4 + \frac{9}{5}$ (3)'den $S_5 = \frac{4}{3} S_1^3 - \frac{1}{3} S_3$ yerine konursa ve (4) kullanılırsa, $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - 4S_1^4 + \frac{12}{5} S_1^3 - \frac{3}{5} S_1^2$ ve eşdeğer olarak,

$$S_9/S_1^2 = \frac{16}{5} - 4S_1^2 - 4S_1^2 + \frac{12}{5} S_1 - \frac{3}{5}$$

yazılabilir.

$k + 1$ tek ise ilk kısımdaki gibi

$$(2n+3)(n+2)^{k+1} - (2n+1)n^{k+1} = 6.2^k a_1 (n+1) + 6.2^k a_2 (n+1)^3 + \dots + 6.2^k a_j (n+1)^{k+1}$$

elde ederiz. Sol taraf $2(n+1)[(n+2)^{k+1} - n^{k+1}] + (n+2)^{k+1} + n^{k+1}$ şeklinde yazılıp $n+1$ 'in kuvvetleri şeklinde düzenlenirse katsayılar hemen,

$$a_1 = \frac{1}{6.2^{k-1}} \left[2 \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} \right],$$