BONCUKLARLA HESAP YAPMAK

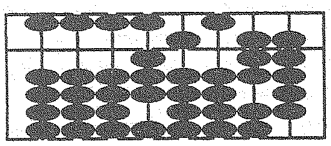
Buket CAN *

Modern hayatın karmaşasına isyan etmenin (en azından benim için) keyifli bir yanı vardır. "Sadelik, sadelik, sadelik!" diye bağırmıştı Henry David Thoreau.. Abaküs şimdiki halinden daha sade olamazdı; yine de işlevini, elektrik devreleri, vakum tüpleri, transitörler, hatta küçük bir kaldıraç veya dişli bile kullanmadan, büyük bir etkinlikle yerine getirir... Duvarda, dev bir bilgisayarın yanında içinde bir abaküs bulunan bir camekan görünür. Üzerinde "ACİL DURUM HALİNDE CAMI KIRINIZ!" yazmaktadır. Ben, Eski Romalıların bile yapabildikleri kadar basit olan bu el bilgisayarına kullanmaktan garip bir keyif duyuyorum.

Martin Gardner

Abaküs, dünyanın en eski hesap makinesi olarak kabul edilebilir. Tahminlere göre, yazının bulunmasından bile daha önceki tarihlerden beri kullanılmaktadır. Eski Roma döneminde iyice yaygınlaşmış, on sekizinci yüzyılda Arap rakamlarının getirdiği aritmetiğe tamamen yenik düşünceye kadar Ortaçağ Avrupası günlük yaşamının önemli bir parçası olmuş, daha sonraları da Uzak Doğu'da kullanılmaya devam etmiştir.

Bu eski makinesiyle işlem yapma tekniği, günümüz aritmetiğinden çok farklı değil. Her iki yöntemin birbirlerine göre üstün tarafları var. Sayı boncukları, Arap rakamlarından daha somut cisimler olduklarından yapılan işlemler daha anlaşılır ve dört işlemi gerçekleştirmek için aritmetiğe dair çok az bir bilgi düzeyi yeterli oluyor. Buna rağmen Arap rakamları daha pratik ve daha hızlı; tecrübeli bir abaküs kullanıcısı oldukça hızlı işlem yapabiliyor, ama bu düzeye erişmek, yıllar süren yoğun bir eğitimi gerektiriyor.



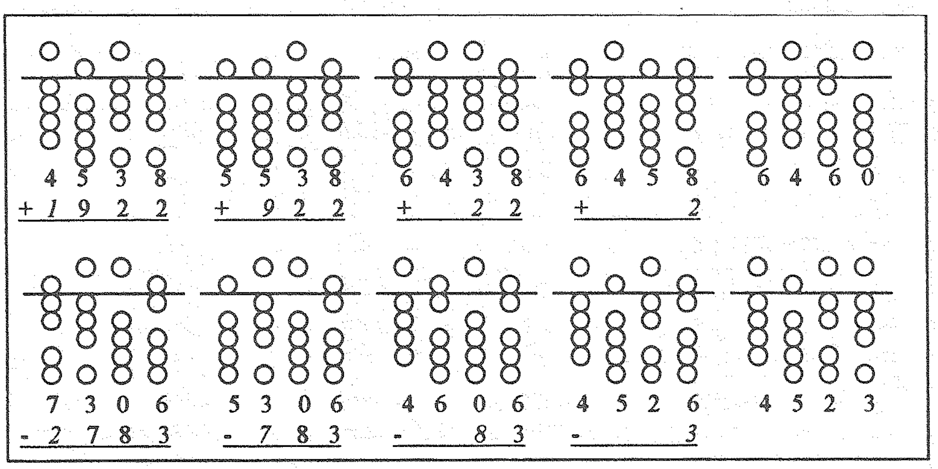
Japon abaküsü "soroban" da '35079' sayısının gösterilişi

Abaküs deyince akla her sırasında onar boncuk bulunan çerçeveli sayma boncukları geliyor. Bu, abaküsün daha çok Rusya'da kullanılan çeşidi. Çin, Japonya, Eski Roma ve Ortaçağ Avrupası'nda kullanılan abaküslerde onluk tabanın yanında bir de beşlik alt-taban bulunuyor. Çin abaküsü "suan-pan"da her sırada, beşer sayı değerinde iki "cennet", birer sayı değerinde beş "dünya" boncuğu var. Japon "soroban" ı da ona çok benziyor, her sırada bir cennet, dört de dünya boncuğu var. Boncuklar, dikey çubuklar üzerine dizili. Cennet ve dünya boncukları, birbirlerinden yatay bir çubukla ayrılıyor. Abaküsün 'sıfır' lanmış hali, bu yatay çubuğun üstünde yeralan cennet boncuklarının yukarı, çubuğun altındaki dünya boncuklarının da aşağı çekilmiş olması. En sağdaki dikey çubuk birler basamağını temsil ediyor, sola doğru gittikçe basamak değeri artıyor. 'Bir' rakamını göstermek için dünya boncuklarından biri yukarı çekiliyor. 'Beş' rakamı için cennet boncukları kullanılıyor, bu boncuklardan biri aşağıya indiriliyor. Eski Roma ve Ortağaç Avrupası'nda boncuklar yerine, düz bir yüzeye çizilen paralel çizgilerin üstünde, önceleri "calculus" denilen çakıl taşları, sonraları "jetton" denilen madeni pullar kullanılmış. Abaküsün sıfır durumu, üzerinde hiç taş bulunmaması. 'Bir' yazmak için birler hanesine, 'elli' yazmak için ara basamak olarak kullanılan elli hanesine bir taş koymak gerekiyor.

Abaküste toplama ve çıkartma yapmanın doğal yöntemi basamak değerlerini gözönünde bulundurarak boncukların yerlerini değiştirmek. Bu işlemler, Arap rakamlarından farklı olarak soldan sağa

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğrencisi

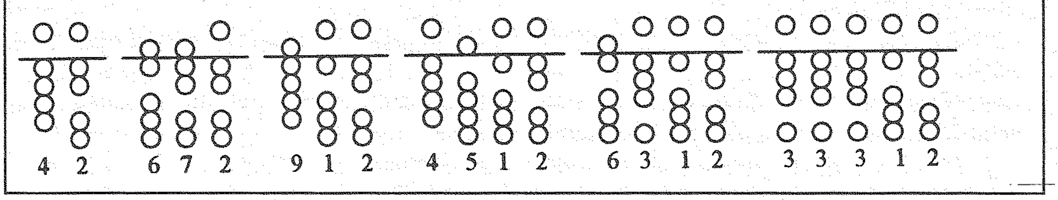
doğru yürütüldüğü ve her bir sayıyı tek tek kaydetme zorunluluğu olmadığı için sözkonusu işlemlerde abaküs kullanıyor olmak daha pratik. Ama daha ile düzeydeki işlemler için, kullanıcının zihinsel katılımı gerekiyor; abaküs, çarpma, bölme yada karekök alma işlemlerini doğrudan yapamıyor, yalnızca ara aşamalarda kullanıcıya yardım ediyor.



Japon abaküsü "soroban" da toplama ve çıkarma

Kullanıcı çarpım tablosunu ezbere biliyorsa, abaküsle çarpma yapmak kağıt kalem tekniğinden çok farklı değil; rakamlar birbiriyle çarpılıp abaküste çarpım sonuçları toplanıyor, işlem bittiğinde sonuç doğrudan okunuyor.

96x347=
6x7 + 90x7 + 6x40 + 90x40 + 6x300 + 90x300 =
42 + 630 + 240 + 3600 + 1800 + 27000 =33312



Soroban'da çarpma

Günümüzde, çarpım tablosu hemen herkese tarafından ezbere bilinir. Ama Eski Roma ve Ortaçağ Avrupası'nda durum böyle değildi. Çarpma yapmak için genellikle detaylı tablolar ve birtakım pratik yöntemler kullanılırdı. Bu yöntemlerden biri Ortaçağ Avrupasında oldukça yayın olarak kullanılan "ikiye çarpma ve ikiye bölme metodu'ydu. İki sayıyı birbiriyle çarpmak için sayılar yanyana yazılır, biri sürekli ikiyle çarpılırken, diğeri sonuçta "1" buluncaya kadar ikiye bölünürdü. Bölme işleminde kesirler dikkate alınmazdı. Çarpım sonucu, bölünen sayılardan tek olanların karşılığındaki çarpımlar toplanarak elde edilirdi. Örneğin 85 ve 127 sayıların çarpmak için:

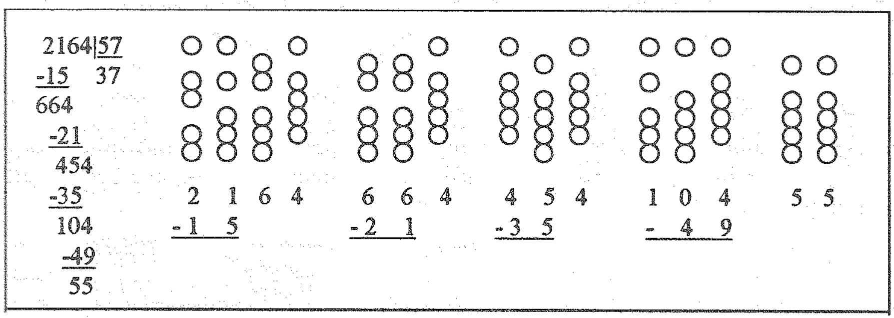
÷2		×2	
85	√	127	
42	×	254	
21	√	508	
10	×	1016	$85 \times 127 = 127 + 508 + 2032 + 8128 = 10795$
5	√	2032	
2	×	4064	
1	√	8128	
		10795	

Bu yöntem, aslında ikilik tabanın uygulamalarından biri. 85 sayısı onluk tabandan ikilik tabana çevriliyor. 127 sayısı da 85 yerine bu sayının ikilik tabandaki karşılığıyla çarpılıyor:

$$85 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^6$$

$$85 \times 127 = (2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6) \times 127 = 127 + 508 + 2032 + 8128 = 10795$$

Çarpmada olduğu gibi, bölme işlemi de kağıt yöntemine benziyor. Örneğin 2164'ü 57'ye bölmek için, sayılar abaküse yerleştiriliyor, $216 \div 57 = 3$ olduğundan 216'dan önce 50×3, sonra da 7×3 çıkarılıp, işleme bu şekilde devam ediliyor. Bölmenin sonucu, ayrıca abaküsün başka bir yerine kaydediliyor.



Bu yöntem, kağıt kalemle uygulandığında uzun görünmesine rağmen abaküs kullanıldığında oldukça pratik. Japon abaküsünde kullanılan teknik, temelde bu yöntemi esas almasına rağmen oldukça detaylı ve bir bölme tablosunu ezberlemeyi gerektiriyor. Daha eski zamanlarda ise bölenin sürekli olarak bölünenden çıkarıldığı bölenin çarpımlarına ayrılarak işlemin sürdürüldüğü yöntemlerin kullanıldığı biliniyor.

Abaküsle dört temel işlem yapılabildiğine göre, bunlar kullanılarak daha karmaşık işlemler de çözülebilir. Örneğin, iki sayının en büyük ortak böleni bulunabilir. Eski Çin matematikçisi Chang Tsang (i.Ö. 250 - 152) "Matematik Sanatanının Dokuz Bölümü" adlı kitabında, bunun için bizim Euclid Algoritması olarak bildiğimiz yöntemi kullanıyor.

M ve N gibi iki sayının ($M < N$) en büyük bölenini bulmak için:

$N = M \times b_2 + k_1 \qquad M > k_1 \geq 0$
$M = k_1 \times b_2 + k_2 \qquad k_1 > k_2 \geq 0$
$k_1 = k_2 \times b_3 + k_3 \qquad k_2 > k_3 \geq 0$ algoritması takip edildiğinde 0'a eşit olmayan son kalan
...
$k_{n-1} = k_n \times b_{n+1} + 0 \qquad k_n > 0$

k_n, M ve N'in en büyük ortak bölenidir.

Chang Tsang, abaküste küçük sayıyı büyük mümkün olduğu kadar çok çıkararak işleme başlıyor ve her bir basamakta bunu devam ettiriyor.

Sayıların köklerinin bulunması problemi uzun süre matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Eski Çin matematiği de bu konuya ilgisiz kalmaz.

Bir sayının karekökünü bulmak için, sayının kaç basamaklı olduğuna bakmak gerekir. Basamaklar tek sayıda ise işleme en soldaki ilk basamaktan, değilse yine en soldaki ilk iki basamaktan başlanır. Diyelim ki 59049un karekökünü bulmak istiyoruz. İlk aşamada, karesi 59049'un ilk basamağından küçük ya da ona eşit olan bir sayı bulmamız gerekiyor.

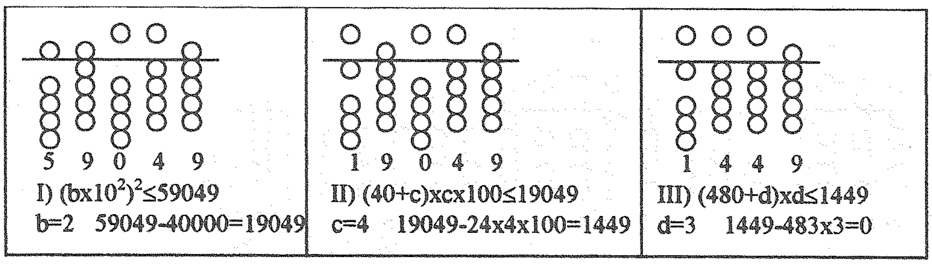
$$b^2 \leq 5 \Rightarrow (b \times 10^2)^2 \leq 59049 \Rightarrow b = 2$$

Bu aşamada 200'ün karesinin 59049'dan küçük olduğunu bulduk. Bir sonraki aşamada 200'den büyük, 59049'un karekökünden küçük ya da ona eşit bir sayı bulmamız gerekiyor.

$[(10b + c) \times 10]^2 \leq 59049 \Rightarrow (100b^2 + 20bc + c^2)x100 \leq 59049 \Rightarrow (40 + c) \times c \times 100 \leq 59049 - 40000 = 19049 \Rightarrow 44 \times 4 \times 100 = 17600 \leq 19049 \Rightarrow c = 4$

Aynı işlem, sonuç bulununcaya kadar tekrar edilir;

$[10(10b + c) + d]^2 \leq 59049 \Rightarrow 100 \times 24^2 + 20 \times 24 \times d + d^2 \leq 59049 \Rightarrow (480 + d) \times d \leq 1449 \Rightarrow 483 \times 3 = 1449 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow 10(10b + c) + d = 243 \Rightarrow 243^2 = 59049$



59049 sayısı tam kare olduğu için karekökünü bulabildik. Diyelim ki 27'nin karekökünün yaklaşık değerini bulmak istiyoruz. Chang Tsang'ın yöntemine gire:

$$b^2 \leq 27 \Rightarrow b = 5$$

Bulmak istediğimiz sayı 5'ten büyük. O halde:

$$\begin{aligned} (5 + a) &\times (5 + a) = 27 \Rightarrow 25 + 10a + a^2 = 27 \Rightarrow 10a + a^2 = 2 \Rightarrow (10 + a) \times a = 2 \Rightarrow a = 2/(10 + a) \\ a \approx a_1 &= 2/10 = 0.2 \Rightarrow \sqrt{27} \approx 5.2 \\ a \approx a_2 &= 2/(10 + a_1) = 2/10.2 = 0.196078 \Rightarrow \sqrt{27} \approx 5.196078 \end{aligned}$$

Bu işleme devam edilirse istenen değere daha çok yaklaşılır.

Karekök bulma yöntemi sayıların daha yüksek dereceden köklerini bulmada da kullanılabilir. Örneğin:

$2 = (1 + a)(1 + a)(1 + a) \Rightarrow 1 + 3a + 3a^2 + a^3 = 2 \Rightarrow a(3 + 3a + a^2) = 1 \Rightarrow a_1 = 1/3 a_2 = 1/(3 + 3a_1 + a_1^2) \cdots$

Chang Tsang'ın kitabında örneklediği bir başka konu, üç bilinmeyenli denklem çözümleriydi:

"3 demet büyük tohum, 2 demet normal tohum, 1 demet küçük tohum 30 *tou* eder.

2 demet büyük tohum, 3 demet normal tohum, 1 demet küçük tohum 34 *tou* eder.

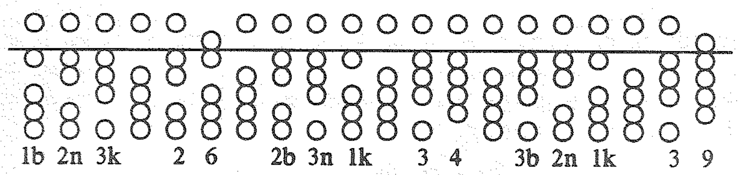
1 demet büyük tohum, 2 demet normal tohum, 3 demet küçük tohum 26 *tou* eder.

Büyük, normal ve küçük tohumlar kaç *tou* ederler?"

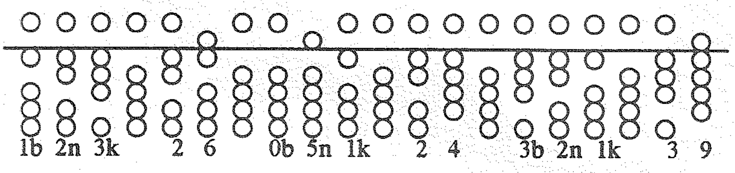
Büyük tohuma "b", normal tohuma "n", küçük tohuma da "k" dersek, bu soru aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} 3b + 2n + k &= 39 \\ 2b + 3n + k &= 34 \\ b + 2n + 3k &= 26 \end{aligned}$$

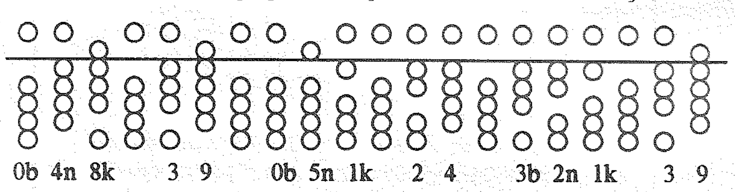
Bu denklemin abaküsteki çözümü bildiğimiz matris yöntemine benzemektedir; önce denklemler abaküse yerleştirilir;



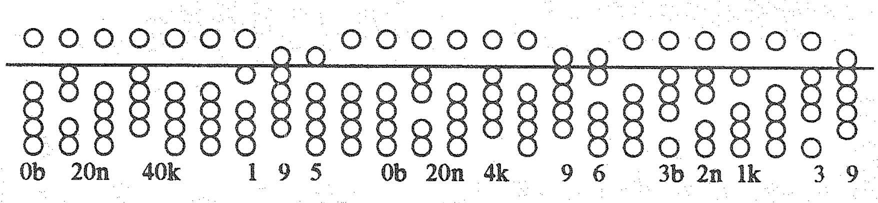
İkinci denklem 3'le çarpılır ve üçüncü denklemin 2 katı bundan çıkarılır:



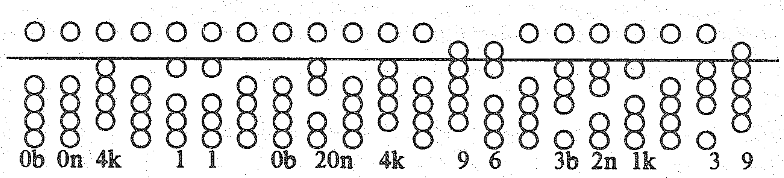
Birinci denklem 3'le çarpılır ve üçüncü denklem bundan çıkarılır:



Birinci denklem 5'le, ikinci denklem 4'le çarpılır:



İkinci denklem birinciden çıkarılır, sonuç 9'a bölünür:



Birinci denklem ikinciden çıkarılır, sonuç 5'e bölünür: