"n" NOKTADA UZAKLIK TOPLAMLARI VE EĞRİLER AİLESİ

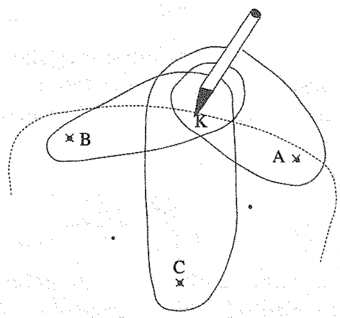
Bilge DEMİRKÖZ *

Daire bir nokta (odak) ve bir uzunluk kullanılarak çizilir ve dairedeki her noktanın odağa olan uzaklığı verilmiş olan uzunluk kadardır. Elips, iki nokta ve bir uzunluk verildiği zaman çizilebilen eğridir ki, bu eğri üzerindeki her noktanın odaklara olan uzaklıkları toplamı sabit ve verilen uzunluğa eşittir.

Konik kesitleri ve onun elemanları olan daire ve elipsi sınıfta işlerken aklıma şu geldi: Dairede bir, elipste iki nokta veriliydi, ikisinde de bir uzunluk verilmişti; eğer üç nokta ve bir uzunluk verilmiş olsaydı nasıl bir eğri elde ederdik. Evet, bu eğrideki herhangi bir noktanın bu üç noktaya olan uzaklıklarının toplamı verilmiş olan uzaklığa eşit olsun. Bu soruya ise 3 nokta sorusu ismini verdim.

3 nokta sorusunun analitik incelemesini yapmadan önce, tahta bir düzlem üzerinde çivilerle tespit ettiğim üç noktaya iplik bağlayıp gergin bir şekilde kalemin ucuyla şekli çizdim. İpliğin uzunluğu bu şekilde verilmiş olan sabit uzunluk, üç çivi ise belirli odaklar gibi davrandı ve 3 nokta eğrisinin genel şekli üzerinde bir fikir verdi.**(bkz. Şekil 1)**

Bu eğrinin bir de geometrik çizimin bulmak gerekiyordu. Bunun için Machintosh'ta Geometer's Sketch Pad programını kullanarak **(bkz. Şekil 2)**, FG'yi sabit bir uzunluk, F, K ve R'yi odaklarımız olarak alıp, J noktasını FG üzerinde serbest bir nokta olarak aldıktan sonra FJ uzunluğu ve F ve K noktaları ile bir elips, geriye kalan JG uzunluğu ile R merkezli bir daire çizer ve elips ile dairenin kesişm noktalarını bulursak 3 nokta eğrisi üzerinde noktalar bulmuş oluruz. Bu şekilde Y ve Z noktaları böyle iki noktadır, Y noktasını ele alırsak $FY + KY = FJ$ elips sayesinde sağlandığı için $FY + KY + RY, FG$' ye eşit olur. Bu çizimde J'nin FG üzerinde animasyonu bütün eğriyi verir.



Şekil 1
Üç Nokta Eğrisinin Fiziksel Çizimi

A, B ve C çiviler, ve K kalem olmak üzere ip şekildeki gibi dolandırılır. Çiviler sabittir. İlk durumda K de sabit olarak alınıp, ipler bağlanır. Bu şekilde ipin uzunluğu da sabit olur. Sonra k'yı ipler gergin durumda ilerletirsek, elinize bir eğri geçer. İpin uzunluğuna $2n$ dersek,

$2KB + 2KC + 2KA = 2n$ olur ve ikiye bölünce

$$KB + KC + KA = n,$$

3 nokta eğrisinin tanımı olan 3 uzaklık toplamının bir sabite eşit olma şartını sağladığından dolayı, elde edilen eğri 3 nokta eğrisidir.

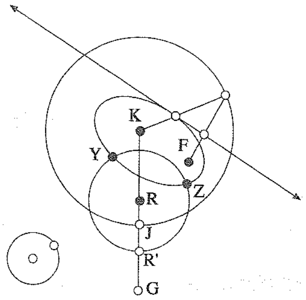
Not: A, B ve C çivileri tahtaya çakılı olduğu için, K, bir çivinin yanına geldiği zaman, bütün ipler çivinin üstünden öbür tarafına atlattırılmakta ve yeniden gerginleştirilmektedir.

Bunların yanı sıra 3 nokta eğrisinin analitik olarak incelenmesi iki nokta arasındaki uzaklık formülü kullanılarak da yapılabilir. Verili (x_1, y_1), (x_2, y_2) noktaları ve n uzaklığı için elipsteki genel formül:

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$

$$+\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = n \text{ dir.}$$

* İstanbul Özel Amerikan Robert Lisesi Öğrencisi.
1995-96 TÜBİTAK Lise Öğrencileri Araştırma Proje Yarışmasında Matematik dalında en iyi derece olan Üçüncülük Ödülü alan çalışmadan yazılmıştır.



Şekil 2

3 nokta sorusuna bunu uygular ve verili üç noktanın $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ ve verili uzaklığın n olduğunu söylersek o zaman formül şöyledir.

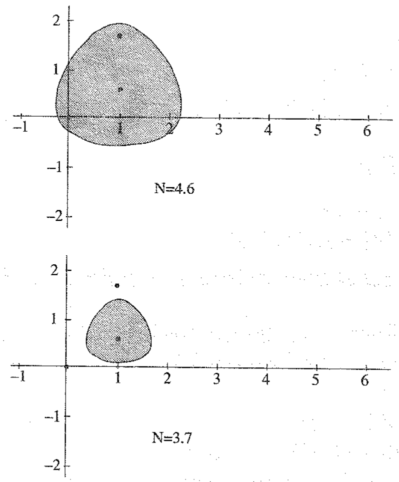
$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$
$$+\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}=n$$

Örnek için; bkz. **Şekil 3**. Bu polar koordinatlarda da çizdirelibilir. Bunun için Napolyon noktası diye bilinen noktayı eğrinin merkezi olarak tanımlayabiliriz. Bu noktanın iki özelliği vardır. Herhangi bir ABC üçgeni alalım ve bunların Napolyon noktası ise K olsun. O zaman AKB, AKC, BKC hep 120 dereceye eşit olur ve böylece polar koordinatlarda odaklar $(r_1,0),(r_2,120)$ ve $(r_3,240)$ oriyantasyonuna sahip olurlar. Bu da formülün açılımında çıkan terimlerin sayısını azaltır. Formül şu olur.

$$\sqrt{r^2+r_1^2-2r_1r\cos(-\theta)}$$
$$+\sqrt{r^2+r_2^2-2r_2r\cos(120-\theta)}$$
$$+\sqrt{r^2+r_3^2-2r_3r\cos(240-\theta)}=n$$

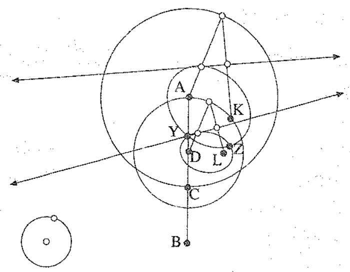
İkinci özellik ise üç uzaklık toplamının bu noktada minimum değerini almasıdır. Bu sayede Napolyon noktasını 3 nokta eğrisinin merkezi olarak tanımlayabiliriz.

Şimdi 1 nokta eğrisi olan daireyi, 2 nokta eğrisi olan elipsi ve üç nokta eğrisini biliyoruz. 4 nokta eğrisi ise öyle bir eğri olmalı ki verilen dört odaktan eğri üzerinde herhangi bir noktaya olan uzaklıkların toplamı verili olan uzunluğa eşit olsun. Bunun fiziksel çizimi dört sabit çiviye ipi dolandırdıktan sonra gergin tutup kalemle çizdirmektir. Bu bize şeklin genel hali üzerinde bir fikir verir. Yine geometrik çizimi de yapılabilir. **(bkz. Şekil 4)** Bu üç nokta sorusunda olduğu gibi bir eliple bir dairenin değil, iki elipsin yahut bir daire ile üç nokta eğrisinin kesişimini almakla elde edilir.



$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$
$$+\sqrt{(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2}=N$$

Şekil 3



Şekil 4

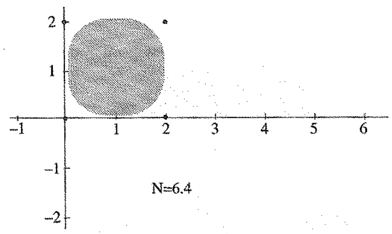
Eğer beş nokta eğrileri ile altı ve daha ileri seviyeden eğrileri düşünürsek, amaç değişmeyerek; m sayıda nokta, $F_1, F_2, F_3 \cdots F_m$ ve belirli bir uzaklık n verildiğinde, P noktalar kümesini bulmak olacaktır, ki P noktalar kümesindeki her K noktası için; $KF_1+KF_2+KF_3+\cdots KF_m=n$ olsun.

Bu durumda alacağımız herhangi bir m nokta eğrisinin geometrik çizimini iki tane daha düşük seviyeden, k ve p nokta eğrilerinin yardımıyla yapabiliriz. Hep $k+p=m$ olacak şekilde k ve p noktaları eğrilerinin odaklarını m nokta eğrisinin odaklarından seçerek oluşan k nokta eğrisinin ve p nokta eğrisinin kesişimini bulup uzaklık toplamlarını değiştirerek anime edersek m nokta eğrisini elde etmiş oluruz.

4 nokta eğrisinin formülü ise yine uzaklık formülü kullanılarak yazılabilir.

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$
$$+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-d)^2+(y-e)^2}=n$$

Örnek için; bkz.**Şekil 5**. Yüksek dereceden nokta eğrileri de aynı şekilde uzaklık toplamlarıyla yazılabilir. Fakat üçten büyük nokta eğrilerinde bir merkezin olma zorunluluğu yoktur. Genel olarak k nokta eğrilerinde bir merkezden bahsedemeyiz.



$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$
$$+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=N$$

Şekil 5

Şimdiye kadar hep uzaklık toplamlarından bahsettik fakat eğer "Bazı uzaklık toplamları çıkarılsa sonuç ne olur" gibi bir soru sorulabilir. Mesela hiperbolde noktalar toplanmak yerine çıkarılmıştır. Bunun cevabı uzaklıkları toplanan noktalar her zaman kümeyi çekerken uzaklıkları çıkarılanların ise her zaman kümeyi itmesidir. **(bkz. Şekil 6)**

Bu eğri ailelerinin bir özelliği ise şudur. Herhangi bir k nokta eğrisinde bir odak noktasını alıp bir başka odak noktasının üzerine koyarsak bu noktaya ait uzaklığı iki ile çarpmış oluruz ve $k-1$ bir nokta kullanarak yeni bir eğri elde etmiş oluruz. Örnek için; bkz.**Şekil 7**. Bunu bir kaç kez tekrarlayıp eğriyi bir nokta sorusuna bile indirgeyebiliriz. İşte bu özellik herhangi bir k nokta eğri ailesinin $k-1$ nokta eğri ailelerini ve daha aşağı eğri ailelerini kapsamasına yol açar.

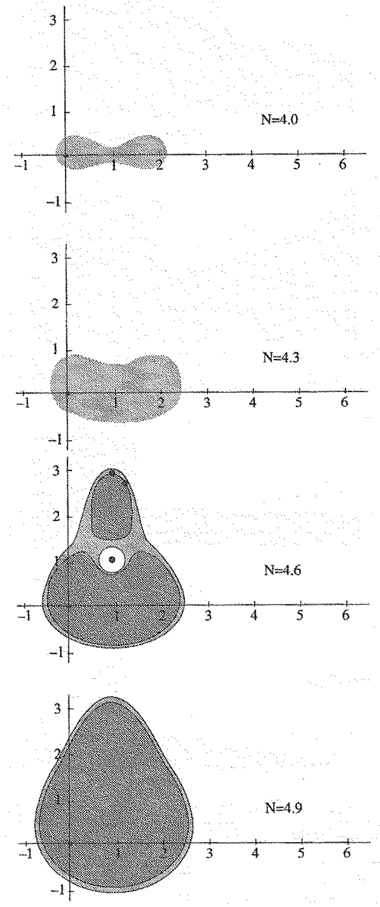
"k^m" notasyonuyla gösteridğimiz pozitif eğri ailelerinden başka "k^{-m}" notasyonuyla gösterdiğimiz negatif nokta eğri aileleri de var. Negatif noktaların eğriler ailesi uzaklıkların tersinin toplamlarının n ye eşit olduğu bir şekiller kümesidir. Buna göre -1 nokta eğrilerinin formülü şu olur.

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}=n$$

Bu formül ise merkezi (x_1, y_1)'de olan bir daire verir. -2 nokta eğrilerinin formülü ise şudur:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}}=n$$

-2 nokta eğrisinin örneği için bkz.**Şekil 8**. -3 ve $-n$ nokta eğrilerinin formülü de aynı şekilde uzaklık formülü sayesinde yazılır. Örnek için bkz. **Şekil 9**.

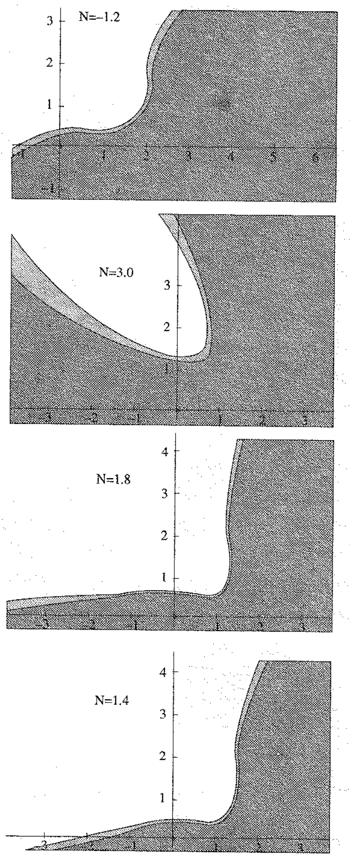


$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$
$$-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=N$$

Şekil 6

Negatif noktalar ailesinin fizikte bir uygulaması da vardır. Elektriksel alanlardaki eşit potansiyel çizgilerini, bu sayede çizdirebiliriz. Bir elektriksel yükten dolayı oluşan potansiyel fark $V=kq/r$ olarak ifade edilir. Bu yazılılımda, q

yükün büyüklüğü r yükten uzaklık ve $k = 8.988 \cdot 10^9 N \cdot m^2/C^2$ dir. Yakınında bir yük bulunan her nokta için eşit potansiyel çizgileri bu şekilde çizdirilir ve -1 nokta sorusunu çerçevesi içinde olup çeşitli daireler verir. Çünkü yük ve aldığımız nokta koordinat ekseni üstüne konulduğunda $r = \sqrt{x^2+y^2}$ olur ve V'yi kq ile böldüğümüzde n'yi buluruz.

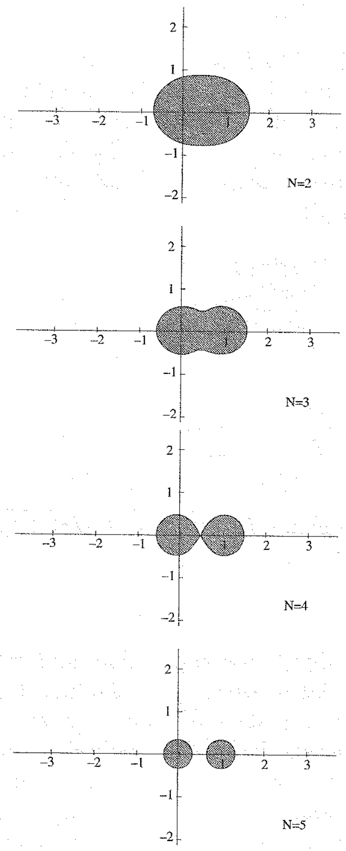


$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$
$$-\sqrt{x^2+(y-2)^2} - 2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = N$$

Şekil 7

İki tane yük olduğu durumda ise $V = kq_1/r_1 + kq_2/r_2$ olur ve -2 nota eğrilerini verir. Aynı şekilde üç yük olduğu zaman da bu uygulanır. Yine $-$ yüklü noktaların kümeyi ittiğini görebiliriz.

Yerçekimi alanlarında da aynı uygulama geçerlidir. GPE, yani yerçekimi potansiyel enerjisi Gm/r ye eşittir, m yerçekimi alanı yaratan cismin kütlesi, r cisme olan uzaklık ve $G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ dir. Manyetik alanlarda da B, manyetik alan, $1/r$ ile doğru orantılıdır ki burada l akımı, r ise uzaklığı belirtir. $-$ nokta eğrilerinin yine eşit alan potansiyeli çizgilerini bulmada uygulamaları vardır.



$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = N$$

Şekil 8

$+$ nokta eğrilerinde olduğu gibi $-$ nokta eğrilerinde de bir uzaklıklar her hangi bir sayıyla çarpılabilir. Bu sayede noktalara çeşitli rasyonel q yükleri de konulabilir. Kaçıncı nokta eğrisi olduğu ise katsayıları tam sayı yapacak bir değerle çarptıktan sonra bu sayıların tam değerlerini toplamakla elde edilir.

Birçok soru bu projeye başladığından beri cevaplanmış durumda, fakat hala cevaplanmamış olanlar var. Bütün "Matematik Dünyası" okuyucularını bu kavramlarla uğramaya davet ediyorum. Bu sorulardan biricisi şekillerin alanının ne olacağı, ikincisi ise şeklin yay uzunluğunun ne olacağı. Amacım bu iki değere de olabildiği durumlarda formül bulabilmektir.