BİR POLİNOMUN GERÇEL OLMAYAN KÖKLERİNİN VARLIĞI İÇİN YETERLİ ŞART

Nizamettin İSKENDEROV *

Bilindiği gibi, bir polinomun derecesi $1, 2, 3$ ya da 4 olduğunda, köklerini bilinen yöntemlerle hesaplamak mümkündür. $n > 4$ olduğunda polinomun köklerini bulmak için hiç bir genel yöntem yoktur. Oysa derecesi $n \geq 1$ olan bir polinomun Cebirin Temel Teoremi adıyla bilinen Gauss teoremine göre en azından bir kökü vardır. Çoğu zaman bu köklerin içinde gerçel olmayan köklerin olup olmadığını önceden bilmek çok önemlidir. Herhangi dereceden polinomlara geçmeden önce, katsayıları geçek sayılar olan ikinci dereceden bir polinomu göz önüne alalım.

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

denkleminin gerçel olamayan kökü olması için

$$p^2 - 4q < 0 \tag{2}$$

olmalıdır. $q < 0$ için (2) sağlanmadığından gerçel olmayan kök yoktur. (2) eşitsizliği (1) denklemini çözerken ortaya çıkar. Bu yöntem yüksek dereceden polinomlar için geçerli değildir. (2) eşitsizliğini, genelde geçerli olan, başka bir yöntemle de göstermek mümkündür.

Gerçekten de, eğer x_1 ve x_2 (1) denkleminin gerçel kökleri ise,

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 x_2^2} \tag{3}$$

doğrudur. Kökler toplamı ve çarpımı, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ olduğundan

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 - 2q$$

olur ve (3) eşitsizliği

$$p^2 - 2q \geq 2|q|$$

şeklinde alır. Buradan görüldüğü gibi,

$$p^2 < 2(q + |q|) \tag{4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (1) in köklerinin gerçel olmadığı anlaşılır. Böylelikle, (4) eşitsizliği gerçel olmayan köklerin varlığı için yeterli şarttır. $q < 0$ olduğunda (4) sağlanmadığından (4) ü (2) şeklinde yazabiliriz.

Şimdi ise,

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{5}$$

genel denklemini göz önüne alalım. Burada $a_1, a_2, \cdots a_n$ gerçel sayılardır. Şimdi (5) denkleminin $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gibi n tane gerçel kökü olduğunu varsayalım (tekrarlanan kökler de bunların içindedir). Negatif olmayan $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sayıları için, Aritmatik Geometrik Ortalama eşitsizliği denilen

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2} \tag{6}$$

olur. Buna göre (5) denkleminin katsayıları için aşağıdakiler doğrudur:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_1, \quad x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_n,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_n x_n = a_2.$$

O zaman

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

$$-2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) = a_1^2 - 2a_2$$

olduğundan dolayı, (6) eşitsizliğini

$$\frac{a_1^2 - 2a_2}{n} \geq \sqrt[n]{a_n^2} \tag{7}$$

biçiminde yazabiliriz. Demek ki (5) denkleminin bütün kökleri gerçel olduğunda, (7) eşitsizliği doğrudur, bir başka deyişle eğer (5) denklemi için

$$a_1^2 - 2a_2 < n \sqrt[n]{a_n^2} \tag{8}$$

* Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü, Öğretim Üyesi

ise, o zaman bu denklemin **bütün kökleri gerçel olamaz.** Böylelikle, (8) koşulu (5) denkleminin gerçel olamayan köklerinin olması için yeterli koşuldur.

Eğer $a_n \neq 0$ ve $a_1^2 \leq 2a_2$ (özel halde $a_1 = a_2 = 0$) ise, diğer katsaylardan bağımsız olarak, her zaman gerçel olmayan kök vardır diyebiliriz.

(5) denkleminde $x = 1/y$ dönüşümü yapılırsa,

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + 1 = 0 \quad (9)$$

denklemi çıkar. Eğer $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (5) in kökleri ise, $1/x_1, 1/x_2, \cdots, 1/x_n$ (9) un kökleri olur ($a_n \neq 0$ ise $k = 1, \cdots, n$ için $x_k \neq 0$ olacaktır).

Buradan yukarıdaki işlemlere benzer şekilde göstermek mümkündür ki, (9) denkleminin gerçel olmayan köklerinin olması için

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n < n\sqrt[n]{a_n^{2n-2}} \quad (10)$$

şartı yeterlidir.

(10) eşitsizliğinden özel halde $a_{n-1}^2 \leq 2a_{n-2}a_n$ veya $a_{n-1} = a_{n-2} = 0$ olursa, ($a_n \neq 0$), (9) denkleminin her zaman gerçel olmayan kökleri vardır.

Hatırlatalım ki, **(8) ve (10) şartları (5) ve (9) denklemlerinin gerçel olamayan köklerinin olması için genel halde yeterli şarttır, fakat gerekli değildir.** Örneğin,

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 26 = 0 \quad (11)$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin kökleri $x_1 = 1, \quad x_2 = 5 + i, \quad x_3 = 5 - i$ dir.

$$a_1^2 - 2a_2 > 3\sqrt[3]{a_3^2} \quad (49^3 > 27 \cdot 26^2)$$

olur. (11) denkleminin bütün kökleri gerçel değildir ve (8) yeterlilik şartı sağlanmıyor. İkinci dereceden denklem olması halinde ise (2) şartı yeterli ve gerekli şarttır.

Örnek: Katsayıları -1 ve 1 sayılarından oluşan ve yalnız gerçel kökleri olan bütün polinomları bulunuz.

Çözüm: $n = 1$ olduğunda bu tür polinomlar yalnız $x - 1$ ve $x + 1$ (yüksek mertebenin katsayısını 1 kabul etmek mümkündür.) şeklinde olur.

$n \geq 2$ olsun. Eğer $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ polinomunun kökleri gerçel ve $a_k \in \{-1, 1\}$ ise, o zaman (7) eşitsizliğini

$$1 - 2a_2 \geq n$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitsizlik yalnız $a_2 = -1$ ve $n \leq 3$ için doğrudur. Böylelikle yalnız $n = 2$ ve $n = 3$ halini gözönüne almalıyız.

a) $n = 2$ olsun. O zaman $f(x) = x^2 + a_1 x - 1$ $a_1 \in \{-1, 1\}$ dir. Aradığımız polinomlar ya $x^2 + x - 1$, ya da $x^2 - x - 1$ olur.

b) $n = 3$ halinde ise, $f(x) = x^3 + a_1 x - x + a_3$ olur $x = \frac{1}{y}$ dönüşümü yardımıyla,

$$g(y) = a_3 y^3 - y^2 + a_1 y + 1$$

çıkar. $g(y) = 0$ denkleminin bütün köklerinin gerçel olması için

$$1^2 - 2a_1 a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_3^4} = 3$$

şartı sağlanmalıdır. Buradan ise, a_1 ve a_3 ün ters işaretli olduğu gözüküyor. Sonuç olarak, bütün mümkün polinomlar $x^3 + x^2 - x - 1$ ve $x^2 - x^2 - x + 1$ olur.

Demek ki problemin şartını sağlayan yalnız 6 polinom vardır.

Aşağıdaki problemleri çözünüz:

1. p katsayını öyle seçiniz ki,

$$x^5 + 6x^4 + px^3 + 2^2 + 8x + 32 = 0$$

denklemi gerçel olamayan çözüme sahip olsun. (Cevap, $p > 8$)

2. $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$ denklemi verilmiştir. Gösteriniz ki,

a) $x = 1$ bu denklemin pozitif olan tek bir köküdür ve onun katlılığı 2 dir.

b) $n \geq 3$ olduğunda bütün kökler değildir.

c) n tek olduğunda negatif kök yoktur, n çift olduğunda ise katlılığı 1 olan ve $(-1, 0)$ aralığında yerleşen tek bir negatif çözüm vardır.

KAYNAKÇA

A.B Kujel.*Irticalen Matematik*, Vışa Şkola, 1983