ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A136. Bir torbada başlangıçta a tanesi kırmızı, b tanesi beyaz ve c tanesi de siyah olmak üzere toplam 20 top bulunmaktadır.

(i) Beyaz topların sayısı iki katına çıkarıldıktan sonra torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığının, başlangıçtaki torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olasılığından $\frac{1}{25}$ daha az olduğu ve

(ii) torbadaki bütün kırmızı toplar çıkartılıp geri kalanlar arasında rastgele bir top çekildiğinde bu topun beyaz olması olasılığının, aynı çekilişin başlangıçtaki torbadan yapıldığı durumdakinden $\frac{1}{16}$ daha fazla olduğu bilinmektedir.

a, b ve c yi bulunuz. (*I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından*)

A137. Yalnızca 1,6 ve 9 rakamları kullanılarak yazılan pozitif tam sayıları

$$1, 6, 9, 11, 16, \cdots$$

diye küçükten büyüğe doğru dizelim.

a) 1996 nın bu dizinin kaçıncı terimi olduğunu bulunuz.

b) Bu dizinin 1996 ıncı terimini bulunuz.

(*I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından*)

A138. $ABCDE$ düzgün beşgeninin içindeki bir F noktası için $m(\widehat{FDC}) = 66°$, $m(\widehat{FBC}) = 60°$ ise AFE açısı kaç derecedir?

A139. B açısı dik açı olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I, $[AI$ ve $[CI$ nın $[BC]$ ve $[AB]$ nı kestiği noktalar E ve D, E ve D den iç teğet çembere çizilen teğetlerin hipotenüsü kestiği noktalar K ve L ise $\tan(\widehat{KBL})$ kaçtır?

A140. $ABCD$ konveks bir dörtgen, köşegenlerin kesişim noktası E, $\widehat{ADB} \cong \widehat{ACD}$ $\widehat{ADC} \cong \widehat{DAC}$ ve $\widehat{DBC} \cong \widehat{DCB}$ ise $\dfrac{EC}{EB} - \dfrac{EA}{ED}$ ifadesinin değeri nedir?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y136. $x^2 - 4x - 2 = 0$ denkleminin köklerinin

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) = 2 + x.$$

denklemini de sağladığını göstererek ikinci denklemin tüm köklerini bulunuz.

Y137. a, b, c gerçel sayıları için $8a + 4b + 2c = 0$ ise $ax^3 + bx^2 + c = 0$ denkleminin $[0, 2]$ aralığında en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

Y138. Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesinde $m(\widehat{APB}) = 150°$, $|AP| = 2\sqrt{3}$ cm ve $|BP| = 2$ cm olacak biçimde bir P noktası alınıyor $|PC|$ yi bulunuz. (*I. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyat sınavından*)

Y139. Herhangi bir ABC üçgeninin iç bölgesinde, $\widehat{DAB} \cong \widehat{DBC} \cong \widehat{DCA}$ olacak biçimde birtek D noktasının bulunduğunu ispatlayınız. $\cot(\widehat{DAB})$ nin bu üçgenin alanı ve kenarları cinsinden değerini bulunuz.

Y140. Bir ABC üçgeninin $[AB], [BC]$ ve $[CA]$ kenarları üzerinde sırasıyla $|DB| = 2|DA|$, $|EC| = 2|EB|$, $|FA| = 2|FC|$ eşitliklerini sağlayan D, E, F noktaları alınıyor. ADF, BED, CEF üçgenlerinin çevrel çemberleri eş ise bu üçgenlerin iç teğet çemberlerinin de eş olacağını ispatlayınız.

ÇÖZÜMLER

Okuyucularımızın yolladığı çözümlerle doğru çözenlerin listesini içeren dosya bir yanlışlık sonucu odamdaki temizlik sırasında kaybolmuştur. Bu nedenle 126 - 130 ve 131 - 135 numaralı Alıştırma ve Yarışma Problemlerini çözenlerin isimlerini veremiyoruz. Okuyucularımızdan ve çözüm yollayanlardan özür dilerim.

A.Erkip

A126. $32n - 7 = m^2$ koşulunu sağlayan sonsuz sayıda (m, n) tamsayı çifti olduğunu gösteriniz. (*Burhan Bursevi*)

Çözüm: $(5, 1)$ sıralı ikilisi istenen koşulu sağladığı görülür. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m = 5+16k$ olsun.

$$\begin{aligned} m^2 = (5+16k)^2 &= 25 + 160k + 256k^2 \\ &= 32(1 + 5k + 8k^2) - 7 \end{aligned}$$

olduğundan $(5 + 16k, 1 + 5k + 8k^2)$ de verilen koşulu sağlar; bu tür sonsuz çoklukta sıralı ikili vardır.

A127. Çevresi bir birim olan ikizkenar üçgenlerden alanı en büyük olanı bulunuz.

Çözüm: Üçgenin kenar uzunluklarını x, x ve $2y$ ile gösterelim. Çevre 1 birim olduğundan $x + y = \frac{1}{2}$ dir. Üçgen ikizkenar olduğundan $2y$ uzunluktaki tabana ait yükseklik $h = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{(\frac{1}{2} - y)^2 - y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - y}$ ve alan $A = y\sqrt{\frac{1}{4} - y}$ dir; y değeri $(0, \frac{1}{2})$ aralığında değişir. Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden

$$\frac{A^2}{4} = \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot (\frac{1}{4} - y) \leq \left(\frac{\frac{y}{2} + \frac{y}{2} + (\frac{1}{4} - y)}{3} \right)^3 = \frac{1}{12^3}$$

yani $A \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}$ bulunur. Eşitlik hali $\frac{y}{2} = \frac{y}{2} = \frac{1}{4} - y$, yani $y = \frac{1}{6}$ iken vardır. Bu durumda $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ üçgenin kenarları $x, x, 2y$ ise $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ uzunluktadır.

Sonuç olarak çevresi 1 birim ikizkenar üçgenler içinde alanı en büyük olanı eşkenar üçgendir, en büyük alan değeri $\frac{1}{12\sqrt{3}}$ tür.

A128. İki merkezli bir $ABCD$ dörtgeninin alanı S, köşegen uzunlukları e, f ise

$$ef \geq 2S$$

eşitsizliği sağlanır ve eşitlik $ABCD$ harmonik bir dörtgen ise geçerlidir. (*Dinçer Akay*)

Çözüm. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan iki merkezli bir dörtgende alan

$$S = \sqrt{abcd}$$

dir. Söz konusu dörtgen, bir kirişler dörtgeni olup Ptolemy teoremi gereğince

$$ac + bd = ef$$

şartını sağlar. Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliğinden

$$\frac{ac + bd}{2} \geq \sqrt{abcd}$$

ve buradan

$$ef \geq 2S$$

elde edilir. Eğer dörtgen harmonik bir dörtgen ise $ac = bd$ olacağından eşitlik geçerli olur.

A129. Her noktada türevli ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ özdeşliğini sağlayan bütün $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun x noktasında türevi olduğundan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{f(y) + xy}{y} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{f(y)}{y} + x = b + x \end{aligned}$$

bulunur. (Son eşitlikten $b = \lim_{y \to 0} \frac{f(y)}{y}$ limitin varlığı görülmektedir.) Integral alarak $f(x) = c + bx + \frac{x^2}{2}$ şeklinde olduğu, verilen bağıntıda yerine koyarak da $c = 0$ ve b nin keyfi olabileceği görülür. Aranan fonksiyonlar b bir keyfi sabit olmak üzere $f(x) = bx + \frac{x^2}{2}$ şeklindedir.

A130. Herhangi bir ABC üçgeninin çevrel çember merkezi O, yarıçapı R, içteğet çember merkezi I ve yarıçapı r olsun. $[OI]$'nın ortasının kenarlara uzaklığının toplamı $\frac{1}{2}(R+4r)$ dir. Kanıtlayınız. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm: I ve O noktalarından BC kenarına indirilen dikmelerin ayakları D ve A_1 olsun. IDA_1O bir dik yamuk olup $[OI]$ nın orta noktasından BC ye indirilen dikmenin uzunluğu bu yamuğun orta tabanının uzunluğuna eşittir. Bu uzunluğu x ile gösterelim. Diğer dikmeler de sıra ile y, z olmak üzere,

$$2x = r + |OA_1|, \ 2y = r + |OB_1|, \ 2z = r + |OC_1|$$

ve $|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| = R + r$ dir. Buradan

$$x + y + z = \frac{1}{2}(R + 4r)$$

bulunur.

Y126. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve dışbükey olsun. Eğer f'nin aldığı değerler alttan ve üstten sınırlı ise, f'nin sabit olduğunu gösteriniz. Dışbükey fonksiyonlar için [1]'e bakınız.

Çözüm: Dışbükey ve sınırlı bir fonksiyonun sabit olduğunu göstereceğiz. Bir $a < b$ ikilisi için $f(a) \neq f(b)$ olduğunu varsayalım. $h = f(b) - f(a) > 0$ ise

$$b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2b - a)$$

olduğundan, dışbükeylikten $f(b) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(2b-a)$ bulunur. Terimleri yerleştirirsek bu

$$2(f(b) - f(a)) \leq f(2b-a) - f(a)$$

şeklinde yazılır. Şimdi $b_0 = b$ ve $n \geq 0$ için $b_{n+1} = 2b_n - a$ dizisini tanımlayalım. Yukarıdaki adımları b_n için tekrarlarsak her $n \geq 0$ için

$$2(f(b_n) - f(a)) \leq f(b_{n+1}) - f(a)$$

ve $h = f(b_0) - f(a)$ olduğundan, yine tümevarımla

$$2^k h \leq f(b_k) - f(a)$$

bulunur. $h > 0$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k = \infty$ olduğundan bu $(f(b_k))$ dizisinin sınırsız olduğunu söyler, yani f nin üstten sınırlı olmasıyla çelişir.

$h = f(b) - f(a) < 0$ ise benzer yolla $a_0 = a$, $a_{n+1} = 2a_n - b$ şeklinde tanımlanan dizi için

$$f(a_n) - f(b) \geq 2^n |h|$$

eşitsizliği yine f nin üstten sınırlı olması ile çelişir. O halde $h = 0$ ve f sabit fonksiyon olmalıdır. (Not. Problemde verilen f nin alttan sınırlı olma koşulu yanıt için gerekli değildir).

Y127. A bir açık aralık, $f : A \to \mathbb{R}$ dışbükey ve $c \in A$ olsun. f'nin c noktasında türevli olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} = 0$$

olduğunu gösteriniz. Dışbükey fonksiyonlar için [1]'e bakınız.

Çözüm: Problemde sözü geçen ([1]. H.T.Kaptanoğlu, *Dışbükey Fonksiyonlar*, Matematik Dünyası 6, sayı 1, 11-18 (1996)) yazıdan dışbükey fonksiyonların her noktada sağdan ve soldan türevleri olduğunu biliyoruz. Yani

$$f_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{ve}$$
$$f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

limitleri vardır. Bu limitler $x = c \pm h$ olarak,

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{ve}$$
$$f'_-(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c) - f(c-h)}{h}$$

olarak ifade edilebilir. Verilen koşuldan

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{f(c) - f(c-h)}{h} \right) \\ &= f'_+(c) - f'_-(c) \end{aligned}$$

yani $f'_+(c) = f'_-(c)$ bulunur, ki bu da f nin c noktasında türevli olduğunu gösterir. Tersine f c de türevli ise

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{f(c) - f(c-h)}{h} \right] \\ &= f'(c) - f'(c) = 0 \end{aligned}$$

sağlanır.

Y128. $a_1 = 2$ ve her tamsayı $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^2 - a_n - 1$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm: $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{a_n}$ olsun. İlk bir kaç terimi hesaplarsak, $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 7$ ve $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{5}{6}, S_3 = \frac{41}{42}$ buluruz. Her k için

$$S_k = 1 - \frac{1}{a_k(a_k - 1)} = 1 - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$$

olduğunu iddia ediyoruz. $k = 1$ için bu doğrudur.

$$\begin{aligned} S_{k+1} = S_k + \frac{1}{a_{k+1}} &= 1 - \frac{1}{a_{k+1} - 1} + \frac{1}{a_{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)} \end{aligned}$$

olduğundan tümevarımla iddiamızın doğru olduğu kanıtlanır. Öte yandan (a_n) artan bir pozitif tam sayı dizisidir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ olur. O halde

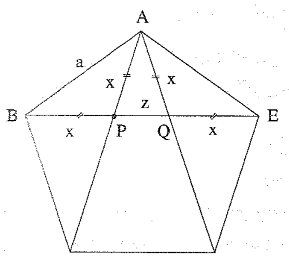
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{k\to\infty} S_k$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{a_{k+1}-1}\right) = 1$$

bulunur.

Y129. Dışbükey düzgün bir beşgenin alanının, köşegenlerinin oluşturduğu yıldızın ortasındaki küçük düzgün beşgenin alanına oranını hesaplayınız. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm:



BAQ ve AQP üçgenlerinin benzerliğinden,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{z}$$

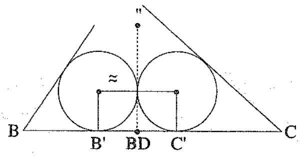
$x + z = a$ dan $z = a - x$ bulunur. $a(a-x) = x^2$ den

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{ve} \quad \frac{a}{z} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. Söz konusu küçük düzgün beşgen büyük düzgün beşgene benzer olup benzerlik oranı kenarlarının oranına eşittir. Dolayısıyla hesaplanması istenen oran $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2$ dir.

Y130. Bir ABC üçgeninin içinde alınan birbirine dıştan teğet eş iki çember $[BC]$'ye, çemberlerden biri $[AB]$'ye ve öteki $[AC]$'ye teğet olup, ortak iç teğet $[BC]$'yi D'de kesiyor. Benzer çizimler $[CA]$ ve $[AB]$ için yapılıp benzer noktalar E ve F ise $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$'nin noktadaş olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm.



$[BC]$ kenarına teğet olan çemberlerin bu kenara değdikleri noktalar B', C' be bu eş çemberlerin yarıçap uzunluğu x olsun. ABC üçgeninin iç yarıçapı r ve BC kenarına değdiği nokta M ise

$$|BM| = u - b = r\cdot\cot\frac{B}{2}, \quad \cot\frac{B}{2} = \frac{u-b}{r}$$

olur.

$$|BC| = a = 2x + x\cot\frac{B}{2} + x\cot\frac{C}{2}$$

den $x = \dfrac{ar}{2r+2a}$ elde edilir. Söz konusu çemberlerin ortak teğeti BC yi D de kestiğine göre,

$$|BD| = \frac{a(r+u-b)}{2(a+r)}, \quad |DC| = \frac{a(r+u-c)}{2(r+a)}$$

ve

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{r+u-b}{r+u-c}$$

dir. Diğer kenarlar için de benzer işlemler yapılarak $\dfrac{|EC|}{|EA|}, \dfrac{|FA|}{|FB|}$ bulunur. Oranlar çarpımı 1 olur. Ceva teoreminin karşıtı gereğince AD, DE, CF nin noktadaş olduğu görülür.

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Prof.Dr. Albert Erkip, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine,
   15 Ekim 1996 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.