GRAFİKLERİ TASARLANAMIYAN SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Nurettin Ergun *

Gerçel değişkenli ve gerçel değerli sürekli bir fonksiyonun grafiğinin hiç kesiklilik göstermeden, hiç sıçrama ve atlama yapmadan kısacası elin hiç kaldırılmadan çizilmesi gerektiğini hepimiz biliriz. Peki ama böyle bir sürekli fonksiyonun, tanımlandığı aralığın **herhangi bir alt aralığında** ne sabit kalan, ne monoton artan ne de monoton azalan bir grafiğe sahip olması olası mıdır?

Bu nitelikteki bir fonksiyonun grafiğini korkunç ve sonsuz sıklıkta, düşünsel olarak tasarlanamaz, başka bir deyimle akıl erdirilemez bir biçimde titreşimler ya da salınımlar yapması gerektiğini düşünebiliriz. Ama grafiğin, sonsuz küçük uzunluktaki bir alt aralıkta bile, kesiklilik göstermeden, sıçrama ve atlamalar yapmadan inip çıkması ya da sabit bir değerde gitmesi nasıl gerçekleşecektir? Çünkü grafiğin **herhangi** bir alt aralıkta azalması ya da artması ya da sabitlenmesi istenmemektedir! O halde böyle bir grafiğe sahip sürekli bir gerçel değerli fonksiyonun var olamıyacağı yargısına varabilirsiniz. Oysa var oldukları bu yazıda örneklerle gösterilecek olan böylesi fonksiyonlarla, onyedinci yüzyıl ortasından beri büyük matematikçilerin çoğunu uğraştıran aşağıdaki şu olağanüstü ilginç sorunun çözümü sıkı biçimde ilişkilidir:

Soru: *Tanımlandığı aralıktaki tüm noktalarda sürekli olan oysa bu aralığın hiç bir noktasında türetilemiyen (türevi olmayan) gerçel değerli bir fonksiyon var mıdır?*

Hiçbir noktada türetilemeyen sürekli gerçel değerli bir fonkisiyonun, uzunluğu ne denli küçük olursa olsun bir alt aralıkta bile) monoton artması ya da monoton azalması ya da sabit olması söz konusu olamıyacaktır. Çünkü, bir aralıkta sabit olan (sabit bir c değerinde giden) bir fonksiyon bu aralığın her noktasında türetilebilirdir ve türev değeri sıfırdır. Ayrıca bu yüzyılın başında kanıtlanan ilginç sonuçlardan birisine göre, gerçel değerli bir fonksiyon, monoton olduğu bir aralıkta (tüm noktalarında sürekli olmasa bile) bu aralıktaki pek çok noktada **türetilebilirdir**.

Sürekli olduğu aralığın **pek çok noktasında** türetilemiyen gerçel değerli bazı fonksiyon örneklerini sanırım çoğumuz biliriz. Bunlara tipik bir örnek

$$g(x) = \min\{x - [x], [x] + 1 - x\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$= \begin{cases} x - k & ; \ x \in [k, k + \frac{1}{2}] \\ k + 1 - x & ; \ x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1] \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

fonksiyonudur. Burada $[x] = \max((-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$, herzaman olduğu gibi x gerçel sayısının tam değerini göstermektedir. Testere dişlisi gibi bir grafiğe sahip olduğu için g fonksiyonuna kimileri testere fonksiyonu adını verir. Kolayca gözlenebileceği gibi g fonksiyonu sınırlıdır, çünkü her x gerçel sayısı için $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ gerçeklenir. $g(x)$ gerçel sayısı aslında x ile ona en yakın tam sayı arasındaki uzaklık değeridir. Tüm gerçel sayılarda sürekli olan bu fonksiyon ($|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$ gerçeklenir) $\mp\frac{1}{2}, \mp\frac{3}{2}, \mp\frac{5}{2}, \cdots$ rasyonel sayılarında türetilemez, çünkü kolayca gözlenebileceği gibi, $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(k + \frac{1}{2} + h) - g(k + \frac{1}{2})}{h} = -1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(k + \frac{1}{2} + h) - g(k + \frac{1}{2})}{h} = 1$$

gerçeklenmektedir. Burada yeri gelmişken, herhangi bir x gerçel sayısı için, ona en yakın tam sayıyı k_x ile gösterirsek, bir $-\frac{1}{2} \leq \beta_x \leq \frac{1}{2}$ sayesinde $x = k_x + \beta_x$ yazılışının geçerli olduğunu gözleyiniz. Evet, şimdi sorumuza geri dönelim. Tanımlı ve sürekli olduğu aralığın hiç bir noktasında türetilemiyen gerçel değerli bir fonksiyon var mıdır?

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

Lütfen dikkat: Bu nitelikte bir fonksiyon bulunabilirse, aynı nitelikte sonsuz çoklukta fonksiyonun varlığı kolayca gösterilebilir! Nasıl mı? Bu garip nitelikteki bir f fonksiyonu ile, derecesi ve katsayıları ne olursa olsun, herhangi bir p polinomunun toplamı olan $f + p$ gerçel değerli fonksiyonu da sürekli olmasına karşın, sözü edilen aralıkta hiç bir noktada türetilemez; neden? Uzatmadan söyliyelim: Bu nitelikte fonksiyonlar vardır! Bu yanıtı iki biçimde verebilirsiniz. Ya Çek matematikçi Bolzano ve usta Alman matematikçileri Riemann ve Weierstrass'ın ondokuzuncu yüzyılın ortalarında yaptığı gibi bu nitelikteki bazı somut fonksiyon örnekleri vererek ya da Polonyalı usta matematikçi Stefan Banach'ın 1920 yılında yaptığı gibi, bu nitelikte fonksiyonların var olduklarını bir varlık teoremi ile kanıtlayarak. Banach'ın dahiyane kanıtlamasını burada vermek doğrusu pek olanaklı değildir, ciddi düzeyde topoloji bilgisi gereklidir. Biz bu yazıda yalnızca tarihi bazı örnekleri incelemek istiyoruz. Öncelikle Weierstrass'ın 1875 yılında verdiği şu örneklere bakalım:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(N^k \pi x) \qquad (0 < a < 1)$$

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 \pi x)}{k^2}$$

Bu fonksiyonlar $\mathbb{R}$ kümesinde yani $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ve süreklidirler, oysa hiçbir gerçel sayıda türetilemezler. Böyle fonksiyonlara, matematikte, heryerde sürekli hiç bir yerde türetilemiyen fonksiyon denir. f fonksiyonunun tanımında kullanılan a pozitif sayısı ile

$$\frac{1}{a} + \frac{3\pi}{2a} < N$$

koşulunu gerçekleyen ve tek bir doğal sayı olan N sabittir. h fonksiyonunun istenilen nitelikte olduğunu, çok uğraşmasına karşın Weierstrass kanıtlayamamış, onun bu özelliklerini usta İngiliz matematikçi Hardy 1916 yılında kanıtlamıştır. Hardy üstelik $1 \leq aN$ gerçekleştiğinde bile f fonksiyonunun istenilen nitelikte olduğunu göstermiştir. İlgilenenler onun [1] makalesine başvurabilirler. Biz bu yazımızda önce yukardaki f fonksiyonunu ardından da daha kolay bir başka örneği inceleyeceğiz. Açıkça söylemekte yarar vardır: Bu yazıda limit kavramı ciddi bir şekilde kullanılmaktadır. Kanıtlamaların güç olmadığını söyleyebiliriz. Sakın okumaktan vazgeçmeyin!

Kanıtlamalar

Önce şunları gözleyelim. Eğer f_n gerçel değerli sürekli fonksiyonları bir M sabiti için

$$\text{Her } x \in \mathbb{R} \quad \text{için} \quad |f_n(x)| \leq M$$

ve a sabit gerçel sayısı da $0 < a < 1$ koşulunu gerçekliyorsa,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f_k(x)$$

şeklinde tanımlanan gerçel değerli F fonksiyonu heryerde hem sınırlıdır, çünkü $|F(x)| \leq \frac{1-a}{M}$ gerçeklenir; üstelik süreklidir çünkü

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a^k |f_k(x) - f_k(x_0)|$$

nedeniyle x_0 gerçel sayısının uygun bir $(x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon)$ civarındaki her x için $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$ gerçeklenir. Nasıl mı? Önce $0 < a^K < \frac{\epsilon(1-a)}{4(1+M)}$ koşulunu gerçekleyen, yeterince büyük K doğal sayısı belirlenirse

$$\sum_{k=K}^{\infty} a^k |f_k(x) - f_k(x_0)| \leq 2M \sum_{k=K}^{\infty} a^k = \frac{2Ma^K}{1-a} < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizlikleri her x gerçel sayısı için geçerli olur. Sonra f_k $(k = 0, \cdots, K-1)$ fonksiyonlarının x_0 noktasında sürekli olmaları nedeniyle $x \in (x_0 - \delta_k, x_0 + \delta_k)$ ise $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\epsilon}{2K}$ olacak biçimde pozitif δ_k sayıları belirlenir. Eğer $0 < \delta_\epsilon < \min\ \{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{K-1}\}$ seçilirse, her $x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon)$ ve $0 \leq k \leq K-1$ için $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\epsilon}{2K}$ olur, neden? Sonuçta bu x ler için

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &\leq \sum_{k=a}^{K-1} a^k |f_k(x) - f_k(x_0)| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \sum_{k=0}^{K-1} |f_k(x) - f_k(x_0)| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki F fonksiyonu, herhangi bir x_0 gerçel sayısında sürekli olmaktadır.

Şimdi de şunları gözleyelim. Yukarıda verilen f fonksiyonu tüm yukarıda anlatılanlar nedeniyle heryerde sürekli ve üstelik sınırlı bir gerçel değerli fonksiyondur, neden? Bundan sonrasında x gelişigüzel ele alınan ama sabit tutulan bir gerçel sayıyı gösterecektir. Dikkat edilirse

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = S_n(h) + R_n(h) \qquad (1)$$

olup, burada

$$\begin{aligned} S_n(h) &= \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{\cos(N^k\pi(x+h)) - \cos(N^k\pi x)}{h}, \\ R_n(h) &= \sum_{k=n}^{\infty} a^k \frac{\cos(N^k\pi(x+h)) - \cos(N^k\pi x)}{h} \end{aligned}$$

yazılmıştır. Bir kez daha anımsatalım: Pozitif h lerle oynayacağız, x gerçel sayısı artık sabit tutulmuştur.

$$\frac{\cos(N^k\pi(x+h)) - \cos(N^k\pi x)}{h}$$

$$= -N^k\pi\sin(N^k\pi(x+h'_k))$$

gerçekleşecek biçimde bir $0 < h'_k < h$ var olduğunu Ortalama Değer Teoreminden biliyoruz. O halde $0 < h$ ne olursa olsun

$$\begin{aligned} |S_n(h)| &\leq \pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (aN)^k |\sin(N^k\pi(x+h'_k))| \\ &\leq \pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (aN)^k = \frac{\pi((aN)^n - 1)}{aN-1} \\ &< \frac{\pi(aN)^n}{aN-1} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Her k doğal sayısı için.

$$N^k x = \alpha_k + \beta_k, \alpha_k \in \mathbb{Z}$$

$$\beta_k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

gerçeklendiğini daha önce gözlemiştik. $h_k = \frac{1}{N^k}(1-\beta_k)$ için $\frac{1}{2N^k} \leq h_k \leq \frac{3}{2N^k}$ ve dolayısı ile

$$\frac{2N^k}{3} \leq \frac{1}{h_k} \leq 2N^k \qquad (\star)$$

geçerlidir. Şimdi amacımız $|R_n(h_n)| \geq \frac{2(aN)^n}{3}$ göstermek olacaktır. Tüm $k \geq n$ doğal sayıları için

$$N^k\pi(x+h_n) = N^{k-n}\pi(N^n x + 1 - \beta_n)$$

$$= N^{k-n}\pi(1+\alpha_n)$$

ve N doğal sayısı ile onun tüm doğal sayı kuvvetleri tek olduğundan, her $k \in \mathbb{Z}$ için $\cos k\pi = (-1)^k$ bağıntısı yardımı ile

$$\begin{aligned} \cos(N^k\pi(x+h_n)) &= \cos(N^{k-n}\pi(1+\alpha_n)) \\ &= [(-1)^{N^{k-n}}]^{(1+\alpha_n)} \\ &= (-1)^{1+\alpha_n}, \\ \cos(N^k\pi x) &= \cos(N^{k-n}\pi(\alpha_n+\beta_n)) \\ &= \cos(N^{k-n}\alpha_n\pi)\cdot\cos(N^{k-n}\beta_n\pi) \\ &= (-1)^{\alpha_n}\cdot\cos(N^{k-n}\pi\beta_n) \end{aligned}$$

ve sonuçta

$$\begin{aligned} |R_n(h_n)| &= \left|\sum_{k=n}^{\infty} a^k \frac{(-1)^{1+\alpha_n}(1+\cos(N^{k-n}\pi\beta_n))}{h_n}\right| \\ &= \frac{1}{h_n}\cdot\sum_{k=n}^{\infty} a^k(1+\cos(N^{k-n}\pi\beta_n)) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son yakınsak serinin tüm terimleri pozitif olduklarından (neden?) bu serinin toplamı ilk teriminden büyüktür, o halde

$$|R_n(h_n)| \geq \frac{1}{h_n}a^n(1+\cos(\pi\beta_n)) \geq \frac{a^n}{h_n} \geq \frac{2(aN)^n}{3}$$

bulunur. Dikkat $0 \leq \cos(\pi\beta_n)$ kullanıldı, çünkü $-\frac{\pi}{2} \leq \pi\beta_n \leq \frac{\pi}{2}$ geçerlidir. O halde $|a+b| \geq |a| - |b|$ nedeniyle, sözü edilen x gerçel sayısı için

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| \geq |R_n(h_n)| - |S_n(h_n)|$$

$$\begin{aligned} &> \frac{2(aN)^n}{3} - \frac{\pi(aN)^n}{aN-1} \\ &= (aN)^n(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{aN-1}) = c(aN)^n \end{aligned}$$

bulunur. Burada c sabiti N doğal sayısının seçiminden ötürü pozitiftir ve $1 < aN$ olduğu için sonuçta, $n \to \infty$ için $h_n \to 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| = +\infty$$

gerçekleştiği anlaşılır. Böylelikle heryerde sürekli olan sınırlı f fonksiyonunun, gerçekten, ele alınan herhangi bir gerçel sayıda türetilebilir olmadığını anlarız. Bu yazının son kısmında benzer nitelikte olup incelenmesi biraz daha kolay bir fonksiyonu görelim. Bu yeni fonksiyon, $4 \leq N$ koşulunu gerçekleyen sabit tutulmuş çift bir N doğal sayısı yardımıyla tanımlanan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^k \cdot \varphi(N^k x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

fonksiyonu olup, burda φ fonksiyonu

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - 2k & ; \quad x \in [2k, 2k+x] \\ 2k+2-x & ; \quad x \in [2k+1, 2k+2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ve her x gerçel sayısı için $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ gerçeklediği kolaşca gözlenen bir başka testere fonksiyonudur. Dikkat edilirse φ fonksiyonu, $[-1,1]$ aralığındaki $|x|$ fonksiyonunun, tüm gerçel sayılar kümesine 2-periyodlu olarak genişletilmişinden başka bir şey değildir. $x, y \in \mathbb{Z}$ ne olursa olsun.

$$\varphi(x+2) = \varphi(x),$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y| \qquad (\star)$$

gerçeklendiği kolayca gözlenecektir. Özel olarak x ve y iki ardışık tam sayı arasında yer alıyorlarsa $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$ gerçekleşmektedir. Tüm bu nedenlerden ötürü bu yeni f fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ gerçel sayılar kümesinde sürekli ve sınırlı olur, neden? Şimdi yine x gerçel sayısını sabit alıp, önceki örnekte olduğu gibi (1) bağıntısını gözönüne alalım. Önce

$$h_n = \frac{1}{2N^n} sgn(\frac{1}{2} + [N^n x] - N^n x) \qquad (n \in |N|)$$

rasyonel sayılarını tanımlayalım; Köşeli parantez yine tam kısım değerini göstermektedir. Dikkat edilirse tanımda geçen işaret (signum) fonksiyonu nedeniyle ya

$$[N^n x] \leq N^n x < N^n(x + h_n) < [N^n x] + 1$$

ya da

$$[N^n x] \leq N^n(x + h_n) < N^n x < [N^n x] + 1$$

gerçeklenir; başka bir deyimle, ardışık iki tam sayı arasında yer alan bu gerçel sayılardaki değerleri için φ fonksiyonu

$$|\varphi(N^n(x + h_n)) - \varphi(N^n x)| = N^n |h_n|$$

gerçekler. Dikkat edilirse her $k > n$ için

$$N^k(x + h_n) = N^k x \mp \frac{1}{2} N^{k-n}$$

gerçekleşmesi, N ve $\frac{1}{2}N^{k-n}$ doğal sayılarının çift ve φ fonksiyonunun 2-periyotlu olması nedeniyle, sonuçta her $k > n$ için $\varphi(N^k(x + h_n)) = \varphi(N^k x)$ bulunur. O halde bu f fonksiyonu için, yukarıdaki gösterimle, $R_{n+1}(h_n) = 0$ ve sonuçta, yine $|a + b| \geq |a| - |b|$ eşitsizliğini aşağıdaki ilk eşitsizliğe geçerken kullanarak

$$\left|\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n}\right|$$

$$= |S_{n+1}(h_n) + R_{n+1}(h_n)| \geq |S_{n+1}(h_n)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\sum_{k=0}^{n}(\frac{N-1}{N})^k \frac{\varphi(N^k(x + h_n)) - \varphi(N^k x)}{h_n}\right| \\
&\geq \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \left|\frac{\varphi(N^n(x + h_n)) - \varphi(N^n x)}{h_n}\right| \\
&- \left|\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{N-1}{N})^k \frac{\varphi(N^k(x + h_n)) - \varphi(N^k x)}{h_n}\right| \\
&\geq (N-1)^n - \sum_{k=0}^{n-1}(N-1)^k \\
&= \frac{(N-1)^{n+1} - 2(N-1) + 1}{N-2} > \frac{1}{2}3^n \qquad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

bulunur, çünkü $0 \leq k \leq n-1$ için $(\star)$ nedeniyle

$$(\frac{N-1}{N})^k \left|\frac{\varphi(N^k(x + h_n)) - \varphi(N^k x)}{h_n}\right| \leq (N-1)^k$$

geçerlidir. Demek ki $n \to \infty$ için yine

$$h_n \to 0 \quad \text{ve} \quad \left|\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n}\right| \to +\infty$$

olmaktadır. Kısacası bu f fonksiyonu da hiç bir x gerçel sayısında türetilemez! Evet, ne dersiniz,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((13)^k \pi x)}{2^k}, \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x) \qquad (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

fonksiyonlarının grafikleri acaba neye benzer?

KAYNAKÇA

[1] G.H.Hardy, *Trans.Amer.Math.Soc.* 17(1916), 301 - 305